La transformada de Laplace en economía

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos[*]

Resumen

Es cada vez más frecuente, que en economía se utilicen técnicas y métodos matemáticos que originalmente surgieron como respuesta a problemas físicos. Una metodología que es usada comúnmente para problemas de ingeniería es la de las transformadas integrales. En este breve artículo estudiamos a una de ellas, la transformada de Laplace. Lo que hace útil a esta transformada es la interpretación natural que tiene como el valor presente de un flujo de efectivo.

§1 Preliminares

Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función. Una **transformada integral** es una relación de la forma

$$F(s) = \int_0^\infty K(s,t) f(t) dt,$$

en donde la función f es transformada en otra función F por medio de una integral.[1] La función F se conoce como la **trasformada de** f y la función K es el **kernel** de la transformación. Claramente, la transformada podría no existir. Las transformadas integrales se utilizan para convertir algún problema que involucra a la función f en otro problema, en ocasiones más sencillo, que involucra a F. Adicionalmente, son una herramienta sumamente útil para la resolución de algunas ecuaciones diferenciales.

[*]Profesores del Departamento Académico de Matemáticas, ITAM.

[1]Si el dominio de f es $\mathbb{R}$, entonces el límite inferior podría también ser impropio y ser $-\infty$, como es el caso de la **transformada de Fourier.**

La transformada de Laplace[2] $\mathcal{L}[f](s)$ es una transformada integral en donde el kernel está dado por e^{-st} de manera que

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

De este modo, la transformada de Laplace de una función f tiene una interpretación económica evidente: $\mathcal{L}[f](s)$ *es el valor presente de un flujo* $f(t)$ *durante el periodo* $[0, \infty)$ *y con una tasa de descuento igual a* s. Esta observación fue hecha en 1986 por S. Buser (véase [Buser 1986]), que detectó en esta transformada una herramienta para calcular el valor presente de flujos de efectivo. Otras aplicaciones dentro de finanzas y actuaría pueden verse en los siguientes artículos: [DeSchepper, Teunen y Goovaerts 1992 y 1994], [Pelsser 2000], [Denuit 2001] y [Bartoszewicz 2000].

Ejemplos

Ej 1.1 Sea $f(t) = t$, entonces

$$\mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt.$$

Esta integral existe siempre y cuando $s > 0$ e, integrando por partes, se obtiene

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}.$$

De forma semejante,[3] si $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$$

y esta integral existe para $s > 0$, tomando el valor

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

[2] Nombrada así en honor del matemático francés del siglo XVIII Pierre S. Laplace.
[3] La prueba puede realizarse fácilmente por inducción.

Ej 1.2 Sea $f(t) = e^{at}$, entonces

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt$$

existe para toda $s > a$ y está dada por

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}.$$

Del mismo modo,

$$\mathcal{L}[e^{-at}](s) = \frac{1}{s+a},$$

que es válida para toda $s > -a$.

Ej 1.3 Sea $c(t)$ una trayectoria de consumo y $u(c(t))$ la utilidad que se deriva del mismo, entonces

$$\mathcal{L}[u(c)](s) = \int_0^\infty u(c(t)) e^{-st} dt$$

es el valor presente de la utilidad acumulada en $[0, \infty)$, descontado a una tasa s.

♣♣♣♣♣

La utilidad de la transformada de Laplace para la solución de ecuaciones diferenciales se deriva de la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0), \tag{1}$$

en donde f es una función diferenciable en $[0, \infty)$. La demostración es sumamente sencilla utilizando la definición de la transformada e integración por partes. Adicionalmente, la transformada de Laplace es un operador lineal, con lo cual se cumplen:

$$\mathcal{L}[0] = 0,$$
$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g] \tag{2}$$

para cualesquiera f y g funciones y $a, b \in \mathbb{R}$. Finalmente, la asignación $f \to F$ es inyectiva, de manera que puede definirse la **transformada de Laplace inversa** (de la función F) como $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = f(t)$. Esta transformada inversa posee también la propiedad de linealidad.

Ejemplos

Ej 1.4 Sea $k(t)$ una trayectoria para el capital. Si el capital se deprecia a una tasa δ, entonces la trayectoria de inversión bruta está dada por

$$I(t) = \frac{dk(t)}{dt} + \delta k(t).$$

Supongamos que la tasa de descuento es igual a r, por lo tanto tomando la trasformada de Laplace de la inversión y utilizando las propiedades (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[I](r) &= \mathcal{L}\left[\frac{dk}{dt}\right](r) + \delta\mathcal{L}[k](r)\\ &= r\mathcal{L}[k](r) - k(0) + \delta\mathcal{L}[k](r)\\ &= (r+\delta)\mathcal{L}[k](r) - k(0).\end{aligned}$$

Esto nos da la relación entre el valor presente de la inversión bruta ($\mathcal{L}[I](r)$) y el del capital ($\mathcal{L}[k](r)$), ambos descontados a la tasa r.

Ej 1.5 Consideremos a la función

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)},\ \ s > 0.$$

¿Cómo calculamos $\mathcal{L}^{-1}[F]$? Necesitamos una función f de tal forma que

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}.$$

Recordemos del ejemplo 1.2 que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{t}](s) &= \frac{1}{(s-1)},\\ \mathcal{L}[e^{-2t}](s) &= \frac{1}{(s+2)},\end{aligned}$$

de aquí que el problema puede resolverse notando que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{3\,(s-1)} - \frac{1}{3\,(s+2)}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t)\\ &= \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}.\end{aligned}$$

♣♣♣♣♣

§2 Solución de ecuaciones diferenciales

Nos concentraremos ahora en la solución de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} + \delta x(t) = H(t), \tag{3}$$

en donde x es una función diferenciable y $H(t)$ es cualquier función cuya transformada de Laplace existe. Si pensamos en $x(t)$ como el acervo de capital al tiempo t, entonces la ecuación (3) es simplemente la ecuación de inversión del ejemplo 1.4 con $H(t) = I(t)$.

Tomemos la transformada de Laplace de (3) para obtener

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right](s) + \delta\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}\left[H\right](s),$$

de aquí, utilizando (1), tenemos

$$s\mathcal{L}[x](s) - x(0) + \delta\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}\left[H\right](s) \tag{4}$$

y, despejando $\mathcal{L}[x](s)$:

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{x(0)}{s+\delta} + \frac{\mathcal{L}\left[H\right](s)}{s+\delta}. \tag{5}$$

Observemos que la transformada de Laplace convierte a la ecuación diferencial de *flujos* dada por (3), en una ecuación algebraica de *acervos* representada por (4).

Tomemos ahora la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ de la expresión (5) para obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+\delta}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{\mathcal{L}[H]}{s+\delta}\right](t) \\ &= x(0)e^{-\delta t} + \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{\mathcal{L}[H]}{s+\delta}\right](t). \end{aligned} \tag{6}$$

La ecuación (6) nos proporciona el valor de $x(t)$ en cada instante dado su valor inicial $x(0)$. La forma explícita de la solución depende de la función $H(t)$, el caso más simple es cuando $H(t) = H$, una constante, de manera que la solución dada por (6) queda como

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{-\delta t} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H}{s(s+\delta)}\right](t) \\ &= x(0)e^{-\delta t} + H\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{\delta(s+\delta)} + \frac{1}{\delta s}\right](t) \\ &= x(0)e^{-\delta t} - \frac{H}{\delta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\delta)}\right](t) + \frac{H}{\delta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) \\ &= x(0)e^{-\delta t} - \frac{H}{\delta}e^{-\delta t} + \frac{H}{\delta} \\ &= \left(x(0) - \frac{H}{\delta}\right)e^{-\delta t} + \frac{H}{\delta}. \end{aligned}$$

La solución general de (6) puede encontrarse de la siguiente manera. Notemos que si $g(t) = e^{-\delta t}$, entonces (ver ejemplo 1.2) se tiene que $\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s+\delta}$ para todo $s > -\delta$, con lo cual

$$x(t) = x(0)e^{-\delta t} + \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[g]\mathcal{L}\left[H\right]\right](t).$$

Existe una propiedad de la transformada inversa[4] que dice que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[g]\mathcal{L}\left[H\right]\right](t) = \int_0^t g(t-\tau)H(\tau)d\tau, \tag{7}$$

[4] A esta propiedad se la conoce como la propiedad de la **convolución**. En general se define la convolución $\alpha * \beta$ de dos funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ como

$$\alpha * \beta = \int_0^t \alpha(t-\tau)\beta(\tau)d\tau.$$

La expresión (7) nos dice que la transformada inversa convierte a productos en convoluciones.Véanse [Edwards y Penney 2001] y [Nagle, Saff y Snider 2001] para mayor detalle.

por lo tanto

$$x(t) = \underbrace{x(0)e^{-\delta t}}_{I} + \underbrace{\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} H(\tau) d\tau.}_{II} \tag{8}$$

La ecuación (8) tiene una interpretación económica inmediata. Para ilustrar esto pensemos en $x(t)$ como el acervo de capital que se deprecia a una tasa δ y en $H(t)$ como la inversión bruta. Entonces (8) dice que el acervo de capital en el tiempo t consiste de dos partes: la primera es lo que queda del capital inicial tomando en cuenta la depreciación (representada por el término I), y la segunda consiste en la inversión acumulada en el periodo $[0, t]$ con su correspondiente depreciación (representada por II).

§3 La función delta de Dirac

Es evidente que, hasta el momento, la transformada de Laplace no es más que otra técnica para la resolución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, su popularidad (sobre todo en problemas de ingeniería) radica en que nos permite resolver ecuaciones en las cuales el término independiente puede ser sumamente "mal portado". En el caso de la ecuación (3), el término $H(t)$ podría no ser una función continua (lo cual representa mejor a la realidad), con lo cual la función $x(t)$ sería diferenciable por pedazos. El tipo de funciones $H(t)$ que vamos a analizar son funciones que son nulas, excepto en algunos intervalos o instantes de tiempo predeterminados.

La función más simple de este tipo es la **función escalón** o **función de Heaviside**. Ésta se define para cualquier $a \geq 0$ como sigue:

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a, \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

Es fácil ver que su transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}[u_a](s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Una variante de esta función es la siguiente:

$$u_{\Delta t, a}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta t} & \text{si } a - \Delta t \leq t \leq a + \Delta t, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Asimismo, tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ se define

$$\delta_a(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} u_{\Delta t,a}(t) & \text{si } t = a, \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

A esta última función se la conoce como la función **delta de Dirac**. Llamamos **función de impulso** a cualquier función que se obtenga como una combinación lineal de deltas de Dirac. Las funciones descritas arriba se ilustran en la figura 1.

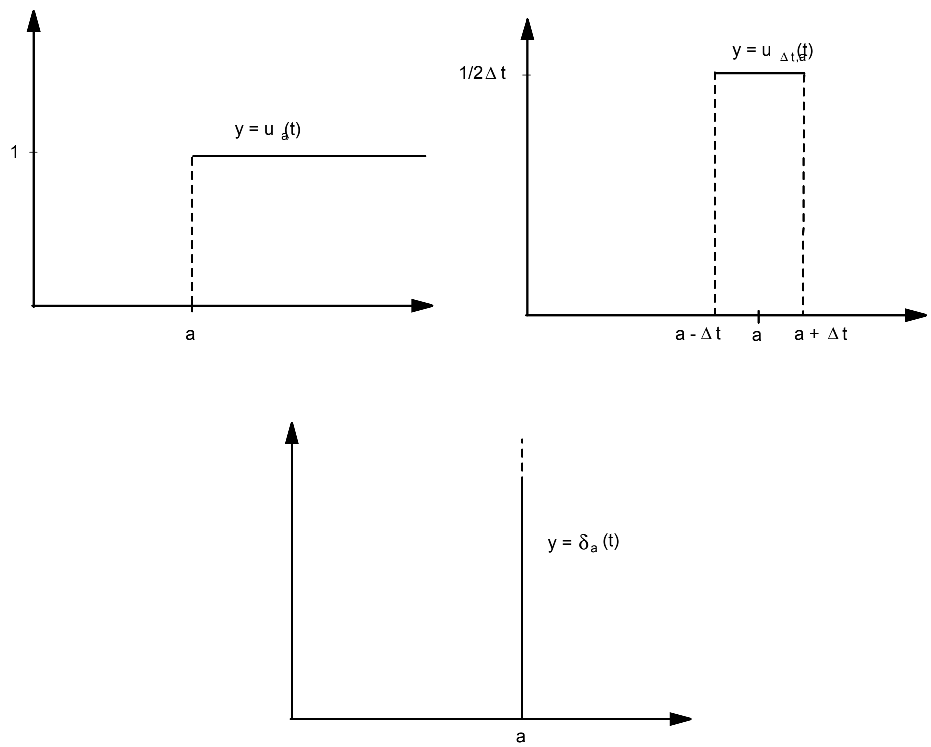

Figura 1: Aquí se ilustran las funciones $y = u_a(t), y = u_{\Delta t,a}(t)$ y $\delta_a(t)$.

Intuitivamente, $\delta_a(t)$ es una función nula excepto en $t = a$, punto para el cual toma un valor "infinito". Podemos imaginar que esta función representa un shock o impulso en $t = a$, algo así como un martillazo, una descarga eléctrica o, porque no, una ganancia o pérdida inesperada de capital representada por un instante de inversión "infinita". A pesar de que parece absurdo, desde el punto de vista matemático, definir a la función de Dirac, la aplicación de la transformada de Laplace la convierte en una función manejable como vemos a continuación.

Proposición 3.1 *La transformada de Laplace de $\delta_a(t)$ está dada por*

$$\mathcal{L}[\delta_a](s) = e^{-as}.$$

$\boxed{\text{Demostración}}$

Dados $a \geq 0$ y $\Delta t > 0$, calculemos primero $\mathcal{L}[u_{\Delta t,a}(t)](s)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u_{\Delta t,a}(t)](s) &= \int_0^{\infty} u_{\Delta t,a}(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{a-\Delta t}^{a+\Delta t} \frac{1}{2\Delta t} e^{-st} dt \\
&= \left(\frac{1}{2\Delta t}\right)\left(\frac{-e^{-s(a+\Delta t)} + e^{-s(a-\Delta t)}}{s}\right) \\
&= \left(\frac{e^{-as}}{s}\right) e^{-s\Delta t}\left(\frac{e^{2s\Delta t} - 1}{2\Delta t}\right).
\end{aligned}$$

Asimismo, tenemos que $\mathcal{L}[\delta_a(t)](s) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{L}[u_{\Delta t,a}(t)]$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta_a(t)](s) &= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) e^{-s\Delta t}\left(\frac{e^{2s\Delta t} - 1}{2\Delta t}\right)\right] \\
&= \left(\frac{e^{-as}}{s}\right) \lim_{\Delta t \to 0}\left[e^{-s\Delta t}\left(\frac{e^{s2\Delta t} - 1}{2\Delta t}\right)\right] \\
&= \left(\frac{e^{-as}}{s}\right) \left.\frac{de^{st}}{dt}\right|_{t=0} \\
&= e^{-as},
\end{aligned}$$

con lo cual se concluye la demostración. ■

Observemos que tiene sentido poner

$$\mathcal{L}[n\delta_a(t)](s) = ne^{-as}$$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s>a$
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$, $s>0$
$\delta_a(t)$	e^{-as}
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$u_a(t)g(t-a)$	$e^{-as}G(s)$, $G(s)=\mathcal{L}[g]$
$e^{at}g(t)$	$G(s-a)$, $G(s)=\mathcal{L}[g]$

Tabla 1: Transformadas de Laplace comunes

dada la linealidad de $\mathcal{L}$, a pesar de que la interpretación de $n\delta_a(t)$ es algo turbia (¿qué significa $n-$veces algo infinito?).

La tabla 1 muestra las transformadas de Laplace (y por lo tanto también las trasformadas inversas) de algunas funciones comunes. Todas ellas pueden demostrarse utilizando la definición de la transformada.

§4 "Impulsos" de inversión

La función delta de Dirac puede aplicarse a un sinnúmero de problemas para los cuales queremos modelar un impulso exógeno. Tomemos, por ejemplo, la siguiente ecuación de inversión:

$$\frac{dk}{dt}=\delta_a(t),$$

es decir, la inversión es nula excepto en el instante $t=a$ para el cual es "infinitamente grande", o bien hay un "impulso" de inversión en $t=a$. La solución a esta ecuación está dada por (6) con $\delta=0$ y por lo tanto,

$$k(t)=k(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t)+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s}\right](t)\Rightarrow$$
$$k(t)=k(0)+u_a(t).$$

La figura 2 muestra el comportamiento de $k(t)$: en el instante $t=a$ el capital pasa discretamente a tomar el valor $k(0)+1$.

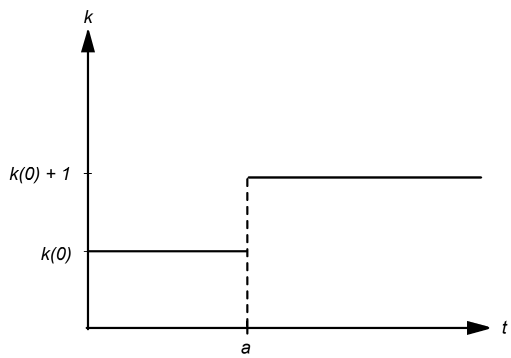

Figura 2: El capital cambia discretamente en $t = a$.

El ejemplo anterior puede generalizarse tomando la siguiente ecuación:

$$\frac{dk}{dt} = \sum_{n=1}^{T} \delta_n(t),$$

es decir, los impulsos de inversión se realizan en $t = 1, 2, ..., T$. La ecuación se resuelve igual que arriba obteniéndose

$$k(t) = k(0) + \sum_{n=1}^{T} u_n(t).$$

La figura 3 muestra el comportamiento de $k(t)$ para este caso.

Podemos también tomar en cuenta la depreciación del capital y considerar la ecuación

$$\frac{dk}{dt} + \delta k = \delta_a(t).$$

Esta ecuación es de la forma (3) y su solución está dada nuevamente por (6) como sigue:

$$\begin{aligned} k(t) &= k(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\delta}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s+\delta}\right](t) \\ &= k(0)e^{-\delta t} + u_a(t)e^{-\delta(t-a)}. \end{aligned}$$

El comportamiento de $k(t)$ cuando $k(0) = 1, \delta = 0.3$ y $a = 4$ se muestra en la figura 4.

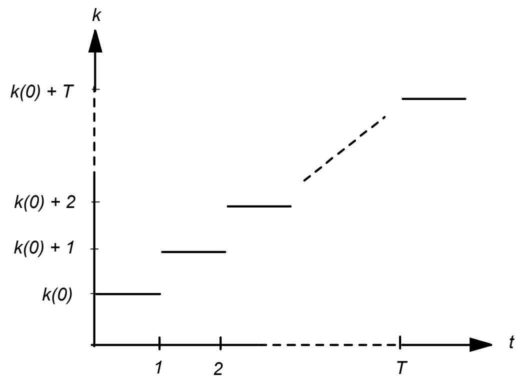

Figura 3: El capital cambia discretamente en $t = 1, 2, ..., T$.

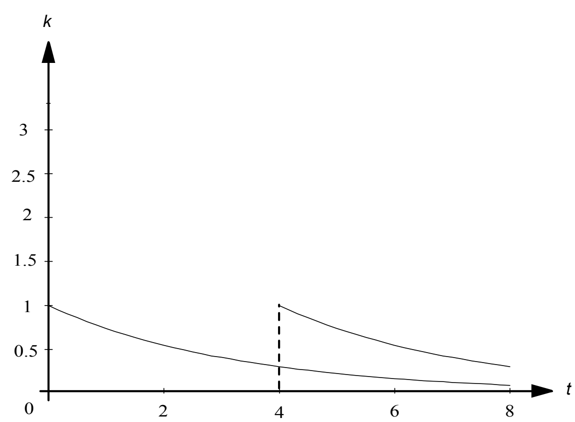

Figura 4: Trayectoria de $k(t) = e^{0.3t} + u_4(t)e^{-0.3(t-4)}$.

Los ejemplos anteriores podrían adaptarse fácilmente al caso de la inversión en un activo con un flujo de dividendos $D(t)$ y una tasa libre de riesgo r. La ecuación para el valor $x(t)$ del activo está dada por

$$\frac{dx}{dt} + D(t) = rx(t),$$

que es una vez más la ecuación (3) con $\delta = -r$ y $H(t) = -D(t)$. Esta ecuación puede interpretarse como una condición de no arbitraje: en cada instante es equivalente invertir la cantidad $x(t)$ a una tasa r, (digamos comprando Cetes) obteniendo una cantidad $rx(t)$, o bien realizar la inversión, obteniendo los dividendos $D(t)$ más el cambio en el valor del activo $\frac{dx(t)}{dt}$. Los dividendos pueden modelarse como funciones de impulso. Ésta es, claramente, una mejor aproximación de la realidad que el pensarlos como funciones continuas.

§5 Conclusiones

En este artículo realizamos una breve exposición de la transformada de Laplace y su interpretación económica. En general, podemos decir que los economistas ignoran la existencia de esta transformada y los usuarios principales de la misma desconocen los conceptos económicos. Esta situación ha mantenido a la transformada alejada del economista profesional, siendo utilizada únicamente como una herramienta para la resolución de algunas ecuaciones diferenciales en finanzas.

La definición misma de la transformada de Laplace, como el valor presente de un flujo, la convierte en un candidato natural para la interpretación y resolución de algunos problemas en economía. El mundo económico suele no estar bien representado por funciones continuas, con lo cual las funciones de impulso son de gran ayuda para la modelación de ciertos fenómenos. La transformada de Laplace nos permite manipular los flujos discontinuos, convirtiéndolos en acervos continuos.

Este trabajo es una muestra más de que la modelación económica da un nuevo sentido a técnicas matemáticas ya conocidas. Podemos decir que la economía no es una simple usuaria de las matemáticas sino que las enriquece, proporcionando interpretaciones dentro de un ámbito distinto al de las ciencias básicas.

Referencias

[1] J. Bartoszewicz, "Stochastic Orders Based on the Laplace Transform and Infinitely Divisible Distributions", *Statist. Probab. Lett.,* 50 (2): 121-129, 2000.

[2] S.A. Buser, "Laplace Transforms as Present Value Rules", *Journal of Finance, 44 (1): 243-247, 1986.*

[3] M. Denuit, "Laplace Transform Ordering of Actuarial Quantities", *Insurance: Mathematics and Economics*, 29: 83-102, 2001.

[4] A.A. DeSchepper, M. Teunen y M. Goovaerts, "The Laplace Transform of Annuities Certain with Exponential Time Distribution", *Insurance: Mathematics and Economics",* 11: 291-294, 1992.

[5] A.A. DeSchepper, M. Teunen y M. Goovaerts, "An Analytical Inversion of a Laplace Transform Related to Annuities Certain", *Insurance: Mathematics and Economics",* 14: 33-37, 1994.

[6] C. Edwards y D. Penney, *Ecuaciones Diferenciales*, Pearson, 2^a ed., 2001.

[7] K. Nagle, E. Saff y A Snider, *Ecuaciones Diferenciales*, Pearson, 2001.

[8] A. Pelsser, "Pricing Double Barrier Options using Laplace Transforms", *Finance Stoch.,* 4 (1): 95-104, 2000.