# Notas de clase;
Teorema del existencia y unicidad

VÍCTOR F. BREÑA MEDINA

**Resumen**

En las siguientes notas, con el fin de estudiar el *Teorema de existencia y unidad*, se explicará con detalle algunas propiedades relacionadas con la noción de espacios métricos y el *Teorema de Banach*, también conocido como *Teorema del punto fijo*.

*Palabras clave:* Teorema de Banach, Teorema de existencia y unicidad, Iteradas de Picard.

## 1. Introducción

Uno de los teoremas más importantes en la *Teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias* es el *Teorema de existencia y unicidad (TEU)*. La razón de su importancia yace en que, dado un *problema de valores iniciales*, también conocido como *problema de Cauchy*, indica las condiciones de: (i) solubilidad y (ii) unicidad. Recordemos que un problema de Cauchy consiste en dos elementos importantes: (a) una ecuación diferencial ordinaria y (b) una condición inicial. En estas notas nos enfocaremos en los problemas de Cauchy de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x)\,, \quad t > t_0\,, \\ x(t_0) = x_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Aunque aquí consideraremos el caso más simple, cuando $x = x(t)$ es una función en $\mathbb{R}$, el resultado final que aquí abordaremos puede extenderse a problemas donde el problema (1) concierne a una función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en $\mathbb{R}^n$.

Primero, recordemos que uno de los primeros resultados más relevantes de la *Teoría del cálculo diferencial e integral* es el *Teorema Fundamental del cálculo (TFC)*. Para fines prácticos en estas notas, el TFC indica que una función continua $g = g(t)$ tiene una familia de primitivas

$$G_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

tales que se satisface que $\dot{G}_{t_0}(t) = g(t)$ para cualquier valor de $t_0 \in \mathbb{R}$. En otras palabras, cada valor de $t_0$ determina una primitiva cuya derivada es $g(t)$, un miembro de esta familia; véase, para mayores detalles, Courant y John 1999a.

De esta manera, en el problema (1) cuando $f(t,x)$ tiene la forma particular:

- lineales: $f(t,x) = \beta(t) - \alpha(t)x$,
- y separables: $f(t,x) = W(t)Z(x)$,

el TFC juega un papel clave para determinar la existencia de la solución y su unicidad; véase Braun 1991. En general, $f(t,x)$ es de naturaleza no lineal o no puede escribirse en términos del producto de funciones cuyos argumentos dependen solamente de $t$ o de $x$. Cuando la función $f$ es no lineal o no es separable, es posible utilizar la *Teoría de ecuaciones exactas*, la cual consiste de métodos para encontrar determinado tipo de soluciones. Sin embargo, el problema de la existencia y unicidad de la solución recae en el método y, por tanto, intrínsecamente en el TFC; véanse, por ejemplo, Braun 1991 y Courant y John 1999b.

Notemos que, al utilizar el TFC, el problema (1) es equivalente a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\xi, x(\xi)\right) \mathrm{d}\xi\,; \tag{2}$$

de este modo, resolver la ecuación (2) es equivalente a resolver el problema (1).

En las siguientes secciones exploraremos los ingredientes necesarios para proveer de argumentos rigurosos que permitan garantizar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones y, en el caso que se tenga una condición inicial como en el problema (1), la unicidad de la solución.

## 2. Definiciones esenciales

El ingrediente principal que podemos observar en un problema de Cauchy es la función $f(t,x)$. Observemos que el conjunto de todas las funciones forman un *espacio vectorial*, lo cual puede verificarse por medio de la definición de espacio vectorial; véase Friedberg, Insel y Spence 1982. De esta manera, estudiaremos primero algunas características generales del espacio de funciones. Como veremos más adelante, el espacio de funciones que nos interesa es un subespacio de este espacio vectorial general.

La primera noción que nos interesa es la distancia entre elementos de un un espacio vectorial $\mathbb{V}$. En otras palabras, definiremos un *espacio métrico*.

**Definición 2.1.** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Se dice que $\mathbb{V}$ es un espacio métrico si existe una función *distancia* $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ tal que, para todos los elementos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}$, se satisfacen las propiedades de:

1. Positividad: $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \geq 0$ y $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ si y sólo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
2. Simetría: $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.
3. Desigualdad del triángulo: $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \leq d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Si se tiene el espacio métrico $\mathbb{V} = \mathbb{R}$, entonces un ejemplo de función distancia que lo define como tal es la que está dada por el valor absoluto de la diferencia entre cualquiera dos elementos $v_1$ y $v_2$ de $\mathbb{R}$, es decir: $d(v_1, v_2) = |v_2 - v_1|$. Equivalentemente, la distancia Euclidiana

$$d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{2j} - v_{1j}\right)^2}\,, \quad \text{donde} \quad \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} v_{k1} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2\,.$$

define también el espacio métrico $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$.

Estamos particularmente interesados en la noción de *espacio métrico completo*. Con este fin, primero definiremos una *sucesión de Cauchy*.

**Definición 2.2.** Decimos que una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(y_{n+m}, y_n) = |y_{n+m} - y_n| < \varepsilon$ para cualquier valor de $m \in \mathbb{N}$.

Recordemos que decimos que una sucesión converge si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ existe. De esta manera, una sucesión de Cauchy puede entenderse como una sucesión tal que cuando $n$ es suficientemente grande los elementos de la sucesión $y_n$ y $y_{n+m}$ están muy cerca uno del otro, sin importar cual sea el valor de $m$.

Una vez entendida esta noción, la definición siguiente determina un espacio métrico completo.

**Definición 2.3.** Un espacio métrico $\mathbb{M}$ es completo si toda sucesión de Cauchy de sus elementos converge a un elemento del mismo espacio $\mathbb{M}$.

A continuación, definiremos los dos últimos conceptos esenciales para trabajar con el espacio de funciones que dan vida al TEU. El primero es el que define una *transformación de contracción* y el segundo un *punto fijo*.

**Definición 2.4.** Sea una transformación tal que $T : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, donde $\mathbb{M}$ es un espacio métrico. Se dice que $T$ es de contracción si existe un escalar $0 < \alpha < 1$ tal que para cualesquiera elementos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de $\mathbb{M}$ se satisface que $d\left(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)\right) \leq \alpha d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Notemos que la transformación $T$ transforma elementos de un espacio métrico en sí mismo. Por otro lado, debido que este espacio es métrico, hay una función distancia de tal manera que la transformación $T$ hace que la distancia entre cualesquiera dos elementos de la imagen es menor que la distancia entre los elementos del dominio. En consecuencia, esto quiere decir que la transformación $T$ juega el papel de reducir la distancia de cualesquiera dos elementos de $\mathbb{M}$. Como veremos más adelante, esta es una condición clave para asegurar la existencia de soluciones en el problema de Cauchy (1).

Con el fin de enunciar la segunda definición y, de este modo, continuar con el estudio de un teorema esencial en la sección §3, definiremos la noción de *punto fijo*.

**Definición 2.5.** Sea una transformación tal que $T : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, donde $\mathbb{M}$ es un espacio métrico. Se dice que $\mathbf{v}_* \in \mathbb{M}$ es un punto fijo de $T$ si se satisface que $T(\mathbf{v}_*) = \mathbf{v}_*$.

En otras palabras, un punto fijo es aquél elemento de un espacio métrico que no se ve afectado por la transformación $T$.

# 3. Teorema de Banach

Uno de los teoremas más útiles en la Teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el Teorema de Banach, también conocido como Teorema del punto fijo. El resultado de este teorema proporciona el argumento central para encontrar las condiciones necesarias y suficientes que determinan la existencia y unicidad del problema (1).

A partir de este punto, con el fin de simplificar la argumentación, cambiaremos de notación y usaremos solamente escalares; es decir, en lugar de usar la notación $\mathbf{v}$, utilizaremos la notación $x$ para referirnos a los elementos de $\mathbb{M}$. Ahora, tomando en cuenta las definiciones 2.2, 2.4 y 2.5 se enuncia el Teorema de Banach:

**Teorema 1.** *Sea $\mathbb{M}$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ una transformación de contracción, entonces $T$ tiene un único punto fijo. En otras palabras, la ecuación $T(x) = x$ tiene una única solución.*

***Demostración.*** La demostración se divide en tres partes:

1. Primero demostraremos que para un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{M}$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obtenida a partir de

   $$x_{n+1} = T(x_n)\,, \tag{3}$$

   es una sucesión de Cauchy. Además, observemos que los elementos de esta sucesión forman un subconjunto del espacio métrico $\mathbb{M}$.

2. En seguida, probaremos que, dado que $\mathbb{M}$ es un espacio métrico completo, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $x_* \in \mathbb{M}$.

3. Finalmente, la unicidad se obtiene a partir de la transformación $T$, la cual es de contracción.

**Paso 1.** Debido a la definición 2.2, tenemos que exhibir una $N \in \mathbb{N}$ a partir de la cual dado $\varepsilon > 0$ si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo 3 en la definición 2.1, observemos que, por un lado,

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m})\,; \tag{4}$$

mientras que por el otro lado, como consecuencia de la definición 2.4 y la fórmula (3), se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$d(x_1, x_2) = d\left(T(x_0), T(x_1)\right) \leq \alpha d(x_0, x_1)\,,$$
$$d(x_2, x_3) = d\left(T(x_1), T(x_2)\right) \leq \alpha d(x_1, x_2) = \alpha d\left(T(x_0), T(x_1)\right) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1)\,,$$
$$\vdots$$
$$\left\{\begin{array}{l} d(x_n, x_{n+1}) = d\left(T(x_{n-1}), T(x_n)\right) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) = \alpha d\left(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})\right) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_0, x_1)\,, \\ \vdots \\ d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) = d\left(T(x_{n+m-2}), T(x_{n+m-1})\right) \leq \alpha d(x_{n+m-2}, x_{n+m-1}) \leq \cdots \leq \alpha^{n+m-1} d(x_0, x_1)\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

De este modo, los términos de la derecha en la desigualdad (4) se encuentran acotados por las cantidades dadas en (5); es decir,

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} \cdots + \alpha^{n+m-1}\right) d(x_0, x_1) = \alpha^n \underbrace{\left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}\right)}_{S} d(x_0, x_1)\,.$$

Notemos que si $S = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}$, entonces $\alpha S = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^m$. De este modo, la diferencia de las expresiones $S$ y $\alpha S$ está dada por $(1 - \alpha)S = 1 - \alpha^m$. Más aún, dado que $0 < \alpha < 1$, entonces $S < 1/(1 - \alpha)$; por lo tanto,

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \alpha^n \underbrace{\frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha}}_{S} d(x_0, x_1) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)\,. \tag{6}$$

Ahora, debido a que se busca que la condición en la definición 2.2 sea satisfecha, entonces (6) debe ser estrictamente menor que $\varepsilon > 0$; es decir, se busca que

$$d(x_n, x_{n+m}) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon\,,$$

lo cual se satisface si

$$\alpha^n < \frac{(1 - \alpha)\,\varepsilon}{d(x_0, x_1)}\,, \quad \text{o equivalentemente, si} \quad n > \underbrace{\frac{1}{\log \alpha} \log\left(\frac{(1 - \alpha)\,\varepsilon}{d(x_0, x_1)}\right)}_{\beta}\,.$$

De este modo, al definir al número natural $N$ como $N := 1 + \lfloor \beta \rfloor$, donde $\lfloor \star \rfloor := \text{máx}\,\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \star\}$ es la *función piso*, también conocida como *función parte entera*, entonces al elegir $n \geq N$ se garantiza que $d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

**Paso 2.** Una vez probado que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por (3) es de Cauchy y considerando que, por hipótesis, $\mathbb{M}$ es un espacio métrico completo, entonces por la definición 2.3 se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x_*$. En otras palabras, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*\,, \quad \text{donde} \quad x_* \in \mathbb{M}\,. \tag{7}$$

**Paso 3.** Para concluir la demostración, tenemos que verificar que $x_*$ es un único punto fijo de la transformación $T$.

La definición 2.4 indica que debido a que $T$ es una transformación de contracción, la cual a su vez satisface que $d\left(T(u_1), T(u_2)\right) < \varepsilon$, si $d(u_1, u_2) < \delta$, donde $\delta := \varepsilon/\alpha$. Esta última afirmación implica que $T$ es una transformación continua. De aquí se sigue que

$$T\left(x_*\right) \underbrace{=}_{\text{por (7)}} T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \underbrace{=}_{\text{continuidad}} \lim_{n\to\infty} T\left(x_n\right) \underbrace{=}_{\text{por (3)}} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \underbrace{=}_{\text{por (7)}} x_*\,.$$

De esta manera, se tiene que existe $x_* \in \mathbb{M}$ tal que $T(x_*) = x_*$, es decir $x_*$ es un punto fijo de $T$.

Finalmente, para mostrar que $x_*$ es único, supongamos que existe otro punto $y_* \in \mathbb{M}$ tal que también es punto fijo, es decir $T(y_*) = y_*$. Calculamos la distancia entre estos dos puntos:

$$d(x_*, y_*) \underbrace{=}_{\text{puntos fijos}} d\left(T(x_*), T(y_*)\right) \underbrace{\leq}_{\text{definición 2.4}} \alpha d(x_*, y_*)\,;$$

esta desigualdad se satisface solamente si $\alpha \geq 1$, lo cual contradice que $0 < \alpha < 1$. En otras palabras, la suposición que $y_* \in \mathbb{M}$ es un punto fijo de $T$ distinto a $x_* \in \mathbb{M}$ es una falacia. Por lo tanto, $x_*$ es punto fijo único de $T$.

$\blacksquare$

## 4. Teorema de existencia y unicidad

Con el fin de utilizar el resultado de la sección §3, consideraremos las funciones $f = f(t, x)$ continuas en el rectángulo centrado en el punto $(t_0, x_0)$,

$$\mathcal{R} := \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq h\,, \quad |x - x_0| \leq Kh\right\} \quad \text{junto con la condición} \quad 0 < Lh < 1\,, \tag{8}$$

donde $K \in \mathbb{R}^+$ es tal que $|f(t, x)| \leq K$. La función $f$ satisface además la *condición de Lipschitz* (ver Braun 1991; Courant y John 1999b),

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|\,, \tag{9}$$

para todo $(t, x) \in \mathcal{R}$. Dicho de otra forma, la función $f$ se encuentra acotada en el rectángulo $\mathcal{R}$ y, además, la recta secante para cualquier pareja $x_1$ y $x_2$ no puede sobrepasar el valor dado por $L$, el cual no puede ser un valor superior a $1/h$. Es decir, la función no puede ascender o descender drásticamente en la dirección de la componente $x$. La pendiente de las rectas secantes dependen de la cercanía entre cada valor de $t$ y el valor fijo $t_0$, donde $h$ determina la distancia máxima entre $t$ y el valor fijo $t_0$. Más aún, la constante $h$ puede entenderse como un incremento en el tiempo, el cual controla a $L$ y la distancia que hay entre $x$ y el valor fijo $x_0$.

De esta manera, consideremos el espacio $\mathbb{M}_*$ de funciones continuas en el rectángulo $\mathcal{R}$ dotado de la distancia definida por

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \max_t |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|\,.$$

Como consecuencia, se obtienen los siguientes resultados:

1. $\mathbb{M}_*$ es un espacio métrico. Esta afirmación proviene a partir de la definición 2.1 y las propiedades del valor absoluto.

2. $\mathbb{M}_*$ es un espacio métrico completo, lo cual es una consecuencia del hecho que $\mathbb{M}_*$ es un subespacio cerrado del espacio de las funciones continuas en $[t_0 - h, t_0 + h]$.

A partir de (2), definimos la transformación $T_*$ dada por

$$T_*\left(\varphi(t)\right) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\xi, \varphi(\xi)\right) \mathrm{d}\xi \,. \tag{10}$$

Si la transformación $T_*$ es tal que transforma todo elemento de $\mathbb{M}_*$ en otro elemento del mismo espacio y, además, es una transformación de contracción, entonces se tienen todos los elementos clave para demostrar el TEU.

**Proposición 1.** *$T_*$ transforma $\mathbb{M}$ en sí mismo y es de contracción.*

***Demostración.*** Primero demostraremos la primer parte de la proposición. Con este fin, consideremos cualquier un elemento $\varphi \in \mathbb{M}$ y el intervalo cerrado dado por $|t - t_0| \leq h$. Tenemos que mostrar que $T_*(\varphi) \in \mathbb{M}$, para lo cual veamos que la definición para $\mathcal{R}$ debe satisfacerse. De este modo, a partir de (10), vemos que

$$|\varphi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f\left(\xi, \varphi(\xi)\right) \mathrm{d}\xi \right| \underbrace{\leq}_{\text{desigualdad del triángulo}} \int_{t_0}^{t} \left| f\left(\xi, \varphi(\xi)\right) \right| \mathrm{d}\xi \underbrace{\leq}_{\text{definición de } \mathcal{R}} K \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\xi \leq Kh \,,$$

donde la última desigualdad se debe a que $\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\xi = t - t_0 \leq |t - t_0| \leq h$. Esto significa que $T_*(\varphi) \in \mathbb{M}$ para cualquier $\varphi \in \mathbb{M}$.

En seguida, para demostrar que $T_*$ es de contracción, debemos que verificar que se satisface la definición 2.4. Para ellos, consideremos dos elementos $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{M}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned}
d\left(T_*(\varphi_1(t)), T_*(\varphi_2(t))\right) &= \max_t \left| \int_{t_0}^{t} \left[ f\left(\xi, \varphi_2(\xi)\right) - f\left(\xi, \varphi_1(\xi)\right) \right] \mathrm{d}\xi \right| \leq \\
&\underbrace{\leq}_{\text{desigualdad del triángulo}} \max_t \left\{ \int_{t_0}^{t} \left| f\left(\xi, \varphi_2(\xi)\right) - f\left(\xi, \varphi_1(\xi)\right) \right| \mathrm{d}\xi \right\} \leq \\
&\underbrace{\leq}_{\text{condición de Lipschitz}} L \max_t \left\{ \int_{t_0}^{t} \left| \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi) \right| \mathrm{d}\xi \right\} \leq \\
&\underbrace{\leq}_{\text{propiedades del máximo}} L \int_{t_0}^{t} \underbrace{\max_t \left| \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi) \right|}_{d\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right)} \mathrm{d}\xi \leq Lh \, d\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right) \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debido a que $0 < Lh < 1$, la transformación $T_*$ es de contracción. ∎

De esta forma, la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad, enunciado a continuación, se sigue a partir del Teorema 1 para $\mathbb{M}_*$ y la transformación (10).

**Teorema 2.** *Dado el problema de Cauchy*

$$\text{(PC)} \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \,, & t > t_0 \,, \\ x(t_0) = x_0 \,, \end{cases}$$

*y las condiciones:*

***i.*** *$f$ es una función continua en $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, el cual es un conjunto que contiene al punto $(t_0, x_0)$, tal que $|f(t,x)| \leq K$ y*

***ii.*** *$f$ es una función que satisface la condición de Lipschitz* (9).

*Entonces, el problema (PC) tiene una única solución $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{R}$ está dado en* (8).

Notemos que:

1. $T_*$ tiene un único punto fijo, es decir $T_*$ en (10) tiene una única solución $x = \varphi(t)$ y, por tanto, la solución de (PC) es única.
2. El punto fijo $\varphi(t)$ es el límite de la sucesión $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$\varphi_0(t) = x_0\,, \qquad \varphi_{n+1}(t) = T_*\left(\varphi_n(t)\right) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\xi, \varphi_n(\xi)\right) \mathrm{d}\xi\,;$$

en otras palabras, se tiene que

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)\,.$$

La sucesión aquí definida es también conocida como las *iteradas de Picard*.

Es posible calcular el error entre las iteradas de Picard y su límite. Este cálculo se obtiene a partir de las propiedades que definen una distancia, véase la definición 2.1. A partir de estas propiedades, se puede ver que

$$d\left(\varphi(t), \varphi_n(t)\right) \leq \frac{(Lh)^n}{1 - Lh} d\left(\varphi_0(t), \varphi_1(t)\right)\,,$$

lo cual quiere decir que este error es de orden potencial y depende de la condición $0 < L < 1/h$.

## Referencias


Braun, M. (1991). *Differential equations and their applications*. Springer.
Courant, R. y F. John (1999a). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Vol. 1. Limusa: Noriega Editores.
— (1999b). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Vol. 2. Limusa: Noriega Editores.
Friedberg, S. H., A. J. Insel y L. E. Spence (1982). *Álgebra lineal*. Publicaciones Cultural, S.A.