Cálculo diferencial e integral III

Ejercicios del curso

1. Una *distancia* en un conjunto Ω es una función $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, tal que para todo $u, v, w \in \Omega$ satisface:
   - Axioma de separación: $d(u, v) \geq 0$.
   - Identidad de indistinguibles: $d(u, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = v$.
   - Simetría: $d(u, v) = d(v, u)$.
   - Desigualdad del triángulo: $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

   Considera el conjunto Ω formado por las funciones continuas $u : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ tales que
   $$\|u\|_{\mathrm{L}^2} := \sqrt{\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)^2 \,\mathrm{d}x}$$
   está definida, donde $\alpha > 0$. Muestra que $d(u, v) := \|u - v\|_{\mathrm{L}^2}$ es una distancia.
2. Determina la representación vectorial de la recta que pasa por el punto $\mathbf{p}_0 = (-2, 0, 4)$ en la dirección $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$.
3. Se tienen n partículas en $\mathbb{R}^n$ cuyas posiciones están dadas por los vectores $\mathbf{q}_j$ y masas por los escalares m_j, donde $j = 1, \ldots, n$. Sea $\mathcal{C}_m$ un punto en el espacio que representa el centro de masa (investigar) y es tal que los vectores $\mathbf{q}_j$ tienen su punto inicial. Demostrar que $m_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + m_n \mathbf{q}_n = \mathbf{0}$.
4. Sean $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ dos vectores no paralelos. Prueba que $\mathbf{q}$, conocido como la *componente de* $\mathbf{p}_1$ *perpendicular a* $\mathbf{p}_1$, está dado por
   $$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_2\|^2} \mathbf{p}_2 \,,$$
   donde $\| \cdot \|$ es la norma euclidiana.
5. Encuentra el ángulo entre el plano $Ax + By + Cz + D = 0$ y la recta dada paramétricamente por $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$ y $z = z_0 + \gamma t$.
6. Encuentra la distancia entre la recta del ejercicio 5 y el punto $\mathbf{q}_0 = (a, b, c)$.
7. Encuentra las curvas de nivel $k = \pm 2, \pm 1, 0$ de las funciones:
   $$f(x, y) = x^2 - y^2 \,, \quad f(x, y) = x^2 y \,, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \,.$$
8. Sean $a, b > 0$ fijos. Encuentra las curvas de nivel para
   $$f(x, y) = \log \left(\frac{1 + \sqrt{ax^2 + 2\sqrt{ab}\,xy + by^2}}{1 - \sqrt{ax^2 - 2\sqrt{ab}\,xy + by^2}} \right) \,.$$
9. Haz un esquema de las superficies de las funciones:
   $$f(x, y) = x - 3y \,, \quad f(x, y) = x^2 \,, \quad f(x, y) = \cos^2(x - y) \,.$$
10. Sea Ω el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen las condiciones abajo dadas. Haz un bosquejo de Ω para cada caso y da una razón geométrica para indicar si son abiertos, cerrados, cerrados y abiertos a la vez o ni abierto ni cerrado.

(a) $x^2 + y^2 \geq 1$.
(b) $2y = x^3$.
(c) $y \geq x^2$ y $|x| < 2$.
(d) $1 < x^2 - y_2 \leq \pi$.

11. Prueba que los siguientes conjuntos son abiertos:

$$\Omega_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}, \quad \Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\right\}.$$

12. Prueba que la cerradura de un conjunto es cerrada.
13. Determina y haz un bosquejo del dominio de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = \log(x^2 - y^2), \quad f(x,y) = \log(x^3 + 5y), \quad f(x,y) = \sqrt{x \operatorname{sen}(\pi y)},$$
$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right), \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}, .$$

14. Investiga la existencia de los siguientes límites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{1+x}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y + 2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2xy)}{xy},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\pi \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right), \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2}{\pi} \arctan\left[\frac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right].$$

15. Sea

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 y^3 + (y - x)^2}, \quad \text{donde} \quad x^2 y^3 + (y - x)^2 \neq 0.$$

Muestra que los límites iterados

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

pero que el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ no existe.

16. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Demuestra que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

pero que los límites iterados $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) \neq \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$.

17. Sea la función f tal que: $f(x,y) = 0$, si $x \leq 0$ o $x \geq y^2$, y $f(x,y) = 1$, si $0 < x < y^2$.
(a) Prueba que $f(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen.
(b) Encontrar una una curva que pase por el origen a lo largo de la cual, salvo el origen, la función tiene el valor constante 1.
(c) Determina si $f(x,y)$ es continua o no en todo su dominio.

18. Da un ejemplo de una función $f = f(x,y)$ para la cual $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista, pero $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no. Justifica detalladamente tu respuesta.
19. Calcula las derivadas parciales de primer para las funciones:

$$f(x,y) = \alpha x^n + \beta y^m\,; \quad f(x,y) = \tan\left(xy^3 + e^x\right)\,; \quad f(x,y) = y^x\,;$$
$$f(x,y,z) = y\,\mathrm{sen}(xz)\,; \quad f(x,y,z) = \log\sqrt{x^2+y^2-z^2}\,.$$

20. Muestra que las funciones $f(x,y) = e^x\cos(y)$ y $g(x,y) = e^x\,\mathrm{sen}(y)$ satisfacen las *ecuaciones de Cauchy–Riemann*: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$.
21. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función conocida y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Considera la composición $f(x,y) = xy\varphi\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$. Determina la función $\psi(x,y)$ de tal manera que f satisfaga

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} - y^2\frac{\partial f}{\partial y} = \psi(x,y)f\,.$$

22. Sea $f = f(t,x)$ una función que satisface la *ecuación de Burger* para un fluido no viscoso:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,.$$

Demuestra que si $x = x(t)$, entonces la composición $f(t,x(t))$ es constante si y sólo si $x(t)$ satisface la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)$.
23. Encuentra el plano tangente a la superficie $z - x^n + y^m = 0$ en $(3,1,3^n-1)$, con $n,m \geq 2$.
24. Sean $f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ y $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Encuentra todos los puntos $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tales que las curvas de nivel uno de $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ se cortan ortogonalmente.
25. Muestra que el plano tangente a la superficie cuadrática $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ en $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ es $\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z = 1$, donde $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > 0$.
26. Calcula la matriz de Jacobi de las siguientes funciones:

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} x\exp(y) + \cos y \\ x + \exp(y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x + \exp(z+y) \\ yx^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} xe^y + \arctan y \\ x \\ x + \exp(y) \end{bmatrix}.$$

27. Encuentra el plano tangente a la superficie definida por $f(x,y) = \int_{x^2-y^2}^{x^2+y^2} \exp\left(-\xi^2\right)\mathrm{d}\xi$ en $(1,1)$.
28. Calcula el gradiente de las siguientes funciones:

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\,, \quad g(x,y,z) = z^2\exp(x)\cos y \quad \text{y} \quad h(x,y,z) = (g\circ f)(x,y,z)\,.$$

29. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores constantes y $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Prueba que:

$$\text{(i) } \mathbf{a}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\right) = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\,, \qquad \text{(ii) } \mathbf{b}\cdot\nabla\left[\mathbf{a}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\right)\right] = \frac{3\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})}{\|\mathbf{r}\|^5} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{r}\|^3}\,.$$

30. Cada una de las siguientes funciones describe la trayectoria de un objeto conforme varía $t \in \mathbb{R}$. Haz un bosquejo de la trayectoria y encuentra la posición del objeto en los tiempos dados.
   (a) $\mathbf{f}(t) = [3\cos t, \operatorname{sen} t, t]^T$, $t = 0, \pi/3, 3\pi/4, 3\pi/2$.
   (b) $\mathbf{f}(t) = [\operatorname{sen} t, t^2 - 1]^T$, $t = -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$.
   (c) $\mathbf{f}(t) = \left[\sqrt{t}, \sqrt{t}/(t+1)\right]^T$, $t = 1/4, 1, 2, 4$.

31. Sea $\mathbf{f}(x,y,z) = [x,y,z]^T$ y $f(x,y,z) = \|\mathbf{f}(x,y,z)\|$.
   (a) Muestra que ∇f es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{f}$ en todo su dominio.
   (b) Muestra que $\nabla f^n = n f^{n-2}\mathbf{f}$, donde $n \geq 1$.
   (c) Encuentra la función escalar $g(x,y,z)$ tal que $\nabla g = \mathbf{f}$.

32. Sean $x = x(t)$ y $y = y(t)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ tales que satisfacen las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Encuentra las funciones $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$ en términos de x y y.
   (b) Muestra que

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right).$$

33. La *braquistócrona* es una curva que, como su raíz etimológica lo indica, describe la forma de la trayectoria que un objeto sigue cuando viaja de un punto $\mathbf{P}_1$ a un punto $\mathbf{P}_2$ en el plano de tal manera que el tiempo de trayectoria es el mínimo. Las consideraciones que se toman en cuenta son: (i) el movimiento del objeto solamente se debe a la gravedad y (ii) no hay fricción. De este modo, la braquistócrona está íntimamente relacionada con otra curva conocida como la *cicloide*, la cual es descrita por $\mathbf{f}(t) = [x(t), y(t)]^T$, cuyas componentes son

$$x(t) = \frac{v_{\mathrm{m}}^2}{4g}(t - \operatorname{sen} t), \quad y(t) = \frac{v_{\mathrm{m}}^2}{4g}(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{1}$$

donde $g \approx \pi^2 \mathrm{m}/\mathrm{seg}^2$ es la aceleración de la gravedad en la Tierra y $v_{\mathrm{m}} > 0$ es un parámetro constante que representa la rapidez máxima que el objeto alcanza en el trayecto.
   (a) Encuentra los tiempos y los puntos donde la cicloide alcanza los valores verticales y horizontales máximos y mínimos. Haz un bosquejo de la curva.
   (b) Muestra que (1) satisface la siguiente ecuación:

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{v_{\mathrm{m}}^2}{2gy}, \quad \text{para} \quad y > 0.$$

   Ayuda. Utiliza el Teorema de la función inversa para funciones de una variable.

34. Sea $\mathbf{f}(t) = \left[t^2 - t, t\sqrt{2t - t^2}\right]^T$, donde $0 \leq t \leq 2$.
   (a) Encuentra la norma $f(t) = \|\mathbf{f}(t)\|$.
   (b) Encuentra los vectores unitarios $\mathbf{u}_{\mathrm{r}}(t)$ y $\mathbf{u}_\theta(t)$, donde el primero tiene la misma dirección de $\mathbf{f}(t)$ y el segundo es ortogonal a éste.
   (c) Calcula $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ y $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
   (d) Escribe la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$ como en términos de $\mathbf{u}_{\mathrm{r}}(t)$ y $\mathbf{u}_\theta(t)$.

35. Calcula la derivada direccional de f en $\mathbf{p}$ en la dirección indicada para cada inciso:
   (i) $f(x,y,z) = e^{xy}\cos\left(xy^2\right) + z^3$, $\mathbf{p} = (2,2,1)$ en la dirección normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
   (ii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, $\mathbf{p} = (3,4,5)$ a lo largo de la curva de intersección de las dos superficies:

$$2x^2 + 3y^2 - z^2 = 5^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

36. Sea $n > 2$ un natural. Muestra que la función

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{(n-2)/2}},,$$

satisface la ecuación de Laplace: $\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$.

37. Muestra que cualquier función de la forma

$$f(x, y, z) = \frac{u(t + r)}{r} + \frac{v(t - r)}{r},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y u y v son funciones de una variable de clase $\mathcal{C}^2$, satisface la *ecuacón de onda*: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$, donde el operador de Laplace está definido en el ejercicio 36.

38. Muestra que la función

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-(x - \alpha)^2}{4t}\right),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ constante, satisface la *ecuación de difusión*: $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

39. Calcula las derivadas parciales de segundo orden respecto a x y y de las siguientes funciones:

(a) $\varphi(u, v) = u \log v$, donde $(u, v) = \left(x^2, \dfrac{1}{1 + y}\right)$,

(b) $\varphi(u, v) = \exp(uv)$, donde $(u, v) = (\alpha x, \cos y)$,

(c) $\varphi(u, v) = f\left(x^2 + y^2, \exp(x - y)\right)$, donde $f \in \mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$.

40. Si $f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace y $v_1(x, y)$ y $v_2(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann, muestra que $\varphi(x, y) = f(v_1(x, y), v_2(x, y))$ es también solución de la ecuación de Laplace.

41. Sea $f = f(x, y)$, donde $x = r \cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$. Expresar $\|\nabla f\|$ en términos de las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

42. Por medio de la *transformación afín* (investiga)

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

donde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, la función $f(x, y)$ se transforma en una función $F(\xi, \eta)$. Muestra que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

43. Encuentra los valores de α, β, γ y δ en términos de A, B y C tales que bajo la transformación

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, la ecuación $A\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ toma la forma

(a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0,$

(b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

Determina cuando estos dos casos son posibles.

44. La *ecuación del gas ideal* establece que $PV = nRT$, donde P es la presión, T es la temperatura absoluta, V es el volumen, n el número de moles del gas y R es la constante universal de los gases.
    (a) Determina las funciones que definen a cada variable como función de las otras variables.
    (b) Muestra que el producto $\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P}\dfrac{\partial P}{\partial V} = -1$ se satisface.
    (c) Reproduce los resultados de los incisos anteriores para la *ecuación de un gas de Van der Waals*:
    $$\left(P + \frac{\alpha n^2}{V^2}\right)(V - n\beta) = nRT\,,$$
    donde β es el volumen por mol ocupado por las moléculas del gas y α es una constante positiva que caracteriza la atracción entre las partículas del gas.

45. La temperatura potencial θ se define en función de la temperatura absoluta T y la presión P por medio de la ecuación
    $$\frac{T}{\theta} = P^k\,, \quad \text{donde} \quad T = T(t,x,y,z)\,, \quad P = P(t,x,y,z) \quad \text{y} \quad k \equiv 0.286\,.$$
    (a) Escribe a θ como función de T y P y calcula las derivadas parciales de θ respecto: (i) a las variables espaciales, x, y y z, y (ii) al tiempo t.
    (b) Al considerar que grandes desplazamientos verticales de paquetes de aire, se tiene la fórmula
    $$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{\alpha}\right)\frac{\theta}{T}\,, \quad \text{donde} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} < 0\,, \quad \alpha > 0 \quad \text{y} \quad g = 32.2\,,$$
    la cual es utilizada por los meteorólogos. Encuentra una condición que indique cómo varía verticalmente la temperatura absoluta.

46. Se conoce que x es la base y y la altura de un triángulo rectángulo con errores de medición h y k, respectivamente. Determina el error posible en el área.

47. Encuentra el valor aproximado de $\log\left[(1.003)^{1/5} + (0.98)^{2/5} + 2\right]$ donde el error sea: (i) lineal y (ii) cuadrático.

48. Si $\mathrm{d}f$ es el error de medición en una cantidad f, el *error relativo* se define como $\mathrm{d}f/f$. Muestra que el error relativo en un producto $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1\cdots x_n$ corresponde a la suma de los errores relativos de los factores.

49. El período $T > 0$ de un péndulo simple está dado por $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Encuentra el valor de T, el error relativo y el error cuadrático, si $\pi = 3.14 \pm 0.002$, la longitud del cordel es $l = 40 \pm 0.1$cm y la aceleración de la gravedad en la Tierra es $g = \pi^2 \times 10\mathrm{cm}/\mathrm{seg}^2$.

50. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ no singular. Muestra que
    (a) el término independiente del polinomio característico es igual $\det(\mathbf{A})$ y que éste está dado por el producto de los valores propios de $\mathbf{A}$;
    (b) el coeficiente del término λ^{n-1} es $-\mathrm{Tra}\,(\mathbf{A})$.

51. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde $\mathbf{B}$ es una matriz diagonal. Prueba que $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A})$ es un polinomio de grado n y satisface que $p(0) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$ y que el coeficiente de λ^n es igual a producto de los elementos diagonales de $\mathbf{B}$.

52. Las matrices de Pauli

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

se utilizan para determinar el *espín* de un electrón en la teoría de la mecánica cuántica.
   (a) Comprueba que son indefinidas.
   (b) Determina **todas** las matrices de 2×2 en los complejos cuyos valores propios sean 1 y -1.

53. Encuentra los extremos y clasifica si son máximos, mínimos o puntos silla de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = y^2\left(\sin x - \frac{1}{2}x\right), \quad f(x,y) = x^y, \quad f(x,y) = ye^{x^2}, \quad f(x,y) = \frac{y}{x}.$$

54. Encuentra y clasifica los extremos de las siguiente funciones, cuando existan:

$$f(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y, \quad f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y, \quad f(x,y) = 1 - (1-x)^2 - y^2.$$

55. Determinar los máximos, mínimos (absolutos y relativos) y puntos silla de la función

$$f(x,y) = xy\left(r^2 - x^2 - y^2\right), \quad \text{donde} \quad r \geq 1,$$

en la región $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1\,,\, x-1 \leq y \leq x+1\right\}$.

56. Determina el conjunto de los máximos y los mínimos de

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right), \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha < \beta.$$

57. Se tienen N datos tales que forman parejas ordenadas $(t_j, x_j) \in \mathbb{R}^2$ con $j = 1, \ldots, N$. Encuentra los coeficientes α_0, α_1 y α_2 del polinomio $p(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ de tal modo que minimizan el error cuadrático

$$E(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^{N}\left(x_j - p(t_j)\right)^2.$$

58. Considera la colección de n puntos distintos $\left\{\boldsymbol{\alpha}_j\right\}_{j=1}^{n}$ en un espacio vectorial m-dimensional. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ y la función $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_j\|^2$. Demuestra que f tiene un mínimo en un punto conocido como centroide, i. e. $\mathbf{x}_{\text{prom.}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j$.

59. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un extremo de la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales de segundo orden en una n-bola de radio $r > 0$ centrada en $\mathbf{x}_0$, i. e. $D_r(\mathbf{x}_0)$. Prueba que $\mathbf{x}_0$ es un punto silla de f si por lo menos dos elementos de la diagonal de la matriz de Hess en $\mathbf{x}_0$, es decir $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$, tienen signos opuestos.

60. Comprueba que $f(x,y,z) = x^m + y^m + z^m - mxyz$, donde $m \in \mathbb{N}$ tiene un extremo en $(1,1,1)$ y determina si es máximo, mínimo o punto silla calculando los valores propios de la matriz de Hess.

61. Encuentra los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco cerrado de radio uno.

62. Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, k > 0$. Considera las funciones $f(x,y,z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ y $\varphi(x,y,z) = x^k + y^k + z^k - 1$ y el octante no negativo, $Q^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \geq 0\right\}$.
   (a) Resuelve el problema de optimización

$$\max_{Q^+}\left\{f(x,y,z)\right\} \quad \text{sujeto a} \quad \varphi(x,y,z) = 0.$$

(b) A partir del resultado en el inciso anterior, deduce la desigualdad

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\gamma} \leq \left(\frac{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\gamma}.$$

63. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Considera la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

(a) Calcula el gradiente ∇f.
(b) Tomando en cuenta que la función f está restringida a la esfera unitaria $S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|\mathbf{x}\|^2 = 1\right\}$, prueba que existe un vector $\mathbf{x}_\star \in S$ y un número real $\lambda_\star \neq 0$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{x}_\star = \lambda_\star\mathbf{x}_\star$.

64. Supongamos que se tiene un bloque rectangular tal que: (i) la suma de las doce aristas es igual a $\alpha > 0$ y (ii) la suma de las áreas de las seis caras es $\alpha^2/25$. Considera que a partir del bloque se corta un cubo de tal manera que sus aristas tienen longitud igual a la menor arista del bloque. Encuentra las longitudes de las aristas cuando el volumen del bloque menos el volumen del cubo es máximo.

65. Supongamos que un pentágono está compuesto por un rectángulo $\square$ y un triángulo isóceles $\triangle$. Las aristas del $\square$ tienen longitudes x y y tales que $x < y$; la arista mayor del $\triangle$ tiene una longitud y y el ángulo duplicado es θ. Si la longitud del perímetro del pentágono es $p > 0$, encuentra el área máxima.

66. Se tienen n mercanías distintas, cuya cantidad está dada por x_j con precio correspondiente p_j, donde $j = 1, \dots, n$. El costo total está dado por la constante $c_0 > 0$. Si cada mercancía tiene una preferencia específica, la función de utilidad como función de las cantidades $x_1, \dots, x_n$ está dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \text{donde } \alpha_j > 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

Muestra que, para obtener la máxima utilidad, el costo proporcional de la cantidad x_j de la j-ésima mercancía es determinado por una proporción q_j del costo total dada por

$$q_j \equiv \frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, n.$$

67. Encuentra una fórmula de la derivada parcial y_{xu} en términos de x, y y u, si $(x-u)^2 + (y-u)^2 = 4$.

68. Para la transformación dada por $x(r,\theta) = r\cos\theta$ y $y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0, 2\pi)$, utiliza el teorema de la función implícita para mostrar que $\|\nabla r\| = 1$ y $\|\nabla\theta\| = \dfrac{1}{r}$.

69. Sea $\mathbf{T} : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ la transformación dada por

$$\mathbf{T}(r,\theta\varphi) = \begin{bmatrix} x(r,\theta\varphi) \\ y(r,\theta\varphi) \\ z(r,\theta\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ r\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

(a) Muestra que existe la transformación inversa $\mathbf{T}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi)$ y deduce sus componentes $r = r(x,y,z)$, $\theta = \theta(x,y,z)$ y $\varphi = \varphi(x,y,z)$.
(b) Por medio del teorema de la función implícita, calcula los gradientes: ∇r, $\nabla\theta$ y $\nabla\varphi$.
(c) Muestra que si $f(x,y,z) = g(r,\theta,\varphi)$, donde $g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\sec^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}v_r - \frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}.$$

70. Sea $\varphi(x,y,u)=0$, donde $\varphi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$. Prueba que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\right].$$

71. Muestra que la transformación

$$\mathbf{T}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$$

rota al cuadrado unitario $C=[0,1]\times[0,1]$ e indica el ángulo de rotación.

72. Sea $C^\star$ el paralelogramo delimitado por: (i) $y=3x+4$, (ii) $y=3x$, (iii) $x=3y$ y (iv) $x=2y-4$. Encuentra la transformación $\mathbf{T}$ tal que transforma $C^\star$ en el cuadrado unitario $C=[0,1]\times[0,1]$.

73. Prueba que $\mathbf{T}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, transforma paralelepípedos en paralelepípedos si $\det(\mathbf{A})\neq 0$.

74. Encuentra la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donde la transformación

$$\mathbf{T}(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+\sqrt{x^2+y^2} \\ -x-\sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix},$$

es invertible.

75. Sea $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $|f'(z)|<1$ para todo $z\in\mathbb{R}$. Prueba que la transformación

$$\mathbf{T}(x,y) = \begin{bmatrix} x+f(y) \\ y+f(x) \end{bmatrix},$$

es invertible en una vecindad de cada punto en $\mathbb{R}^2$.

76. Sea la transformación $\mathbf{T}(x,y)=[f(x,y),g(x,y)]^T$, donde f y g son dos funciones tales que satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann.
    (a) Muestra que $\mathbf{T}$ tiene inversa si $\|\nabla f\|^2=\|\nabla g\|^2>0$.
    (b) Sean las componentes de $\mathbf{T}$ dadas por $f(x,y)=e^x\cos y$ y $g(x,y)=e^x\operatorname{sen} y$. Prueba que f y g satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann.
    (c) Muestra que la matriz de Jacobi de $\mathbf{T}$ nunca se anula y por tanto la transformación es invertible en una vecindad de cada punto.
    (d) Prueba que la transformación cuyas componentes son como en el inciso (b) no es inyectiva y por lo tanto no invertible en todo $\mathbb{R}^2$.
    (e) Discute si los resultados en (c) y (d) se contradicen.

77. Determina el dominio de integración, cambia el orden de integración y calcula la integral de los siguientes incisos:

$$\text{(i) } I = \int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad \text{(ii) } I = \int_{-3}^{1}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad \text{(iii) } I = \int_{0}^{1}\int_{\arctan y}^{\pi/4} \sec^5 x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

$$\text{(iv) } I = \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos x} \cos x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(v) } I = \int_{0}^{1}\int_{x}^{1} xy^{\alpha-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \quad \text{con } \alpha > 1\,,$$

$$\text{(vi) } I = \int_{2}^{4}\int_{4/x}^{(20-4x)/(8-x)} (y-4)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,.$$

78. Demuestra las siguientes desigualdades:
   a) $\Omega = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Omega} \exp\left(\sin(x+y)\right)\mathrm{d}\Omega \leq e\,.$$

   b) $\Omega = [0,1]\times[0,1]$:

$$\frac{1}{2}\left(1-\cos 1\right) \leq \iint\limits_{\Omega} \frac{\sin x}{1+x^4y^4}\mathrm{d}\Omega \leq 1\,.$$

   c) $\Omega = [-1,1]\times[-1,2]$:

$$1 \leq \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\Omega \leq 6\,.$$

   d) Ω es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$:

$$\frac{1}{6} \leq \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{y-x+3}\mathrm{d}\Omega \leq \frac{1}{4}\,.$$

79. Calcular la integral $\iint_\Omega (x+y)\mathrm{d}\Omega$, donde:
   a) Ω es el rectángulo con vértices: $(0,1)$, $(1,0)$, $(3,4)$ y $(4,3)$.
   b) Ω es el cuadrado con vértices: $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,1)$ y $(2,-1)$.

80. Calcula el área de la región que está dentro de la curva dada por $r(\theta) = 3\sin\theta$ y fuera de la curva determinada por $r(\theta) = 1+\sin\theta$, ambas funciones están en coordenadas polares.

81. Calcula el volumen de un elipsoide cuyos semiejes son tales que $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

82. Sea $u = f(\mathbf{x})$ una función continua y $B_r(\mathbf{x}_0)$ la bola de radio r centrada en el punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Prueba que

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{V(r)}\iiint\limits_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\,, \quad \text{donde} \quad V(r) = \iiint\limits_{B_r(\mathbf{x}_0)} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\,.$$

83. Encuentra el volumen entre el plano x,y y el paraboloide $f(x,y) = r^2 - x^2 - y^2$, donde $r \neq 0$.

84. Calcula la integral

$$I = \iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

cuando:

(a) Ω es un lazo de la lemniscata dada por la curva de nivel cero de $\varphi(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2-y^2\right)$.

(b) Ω es el triangulo rectángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,-1)$.

85. Calcula la integral

$$I = \iiint\limits_{\Omega} |xyz| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,, \quad \text{donde} \quad \Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \leq 1 \right\}.$$

86. Sea $M > 0$, $\mathrm{R} = [-M, M] \times [-M, M]$ y $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

(a) Muestra que

$$\pi\left(1 - e^{-M^2}\right) \leq \iint\limits_{\mathrm{R}} f(x,y)\mathrm{dR} \leq \pi\left(1 - e^{-2M^2}\right).$$

(b) Prueba que

$$\pi\left(1 - e^{-M^2}\right) \leq \left(\int\limits_{-M}^{M} u\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}, \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\xi\right)^2 \leq \pi\left(1 - e^{-2M^2}\right).$$

(c) Calcula la siguiente integral

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}, \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\xi\,.$$

87. Una placa que tiene la forma de la región que está dentro de la curva $r = 3\sin\theta$ y fuera de la curva $r = 1 + \sin\theta$. Esta placa tiene una función de densidad de masa en el punto **P** igual al cuadrado de la distancia que hay de **P** al eje polar. Calcula:

(a) La masa total de la placa.

(b) El centro de masa de la placa.

88. Sea $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$; calcula la integral

$$I = \iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}\,.$$

89. Sea $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Calcula el valor de

$$I = \iint\limits_{\mathcal{D}} \log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

90. Sea $f(x,y) = \dfrac{\alpha \exp\left(-x^2-y^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}}}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Encuentra el valor de $M > 0$ tal que se satisface la desigualdad

$$|f(x,y)| \leq \frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\alpha}}}, \qquad \text{en todo } \mathbb{R}^2 .$$

(b) Usa las coordenadas polares para mostrar que la integral

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

existe, si $\alpha < 2$.

(c) Calcula el valor de la integral I del inciso anterior para $\alpha = 1$.