Sistemas Dinámicos I
Ejercicios del curso

1. Haz un bosquejo de los campos de velocidades y órbitas representativas cuyas tangentes sean igual al campo para
   (a) $f(x_1, x_2) = x_1\left(1 + x_2^2\right)$,
   (b) $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$,
   (c) $\mathbf{f}(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^T$,
   (d) $\mathbf{f}(x_1, x_2) = [-x_2, 2x_1]^T$,
   (e) $\mathbf{f}(x_1, x_2) = [x_1, -x_2]^T$.
2. Muestra que $t^2 + x^2 = k^2$, donde $k \geq 0$, es una solución de $x\dot{x} = -t$. Haz un bosquejo de la familia de soluciones en $\mathbb{R}^2$.
3. Considera la EDO: $\ddot{x} = \alpha t^3 + 1$, donde $\alpha > 0$.
   (a) Encuentra todas las soluciones en el intervalo $0 \leq t \leq 1$.
   (b) Encuentra la solución $x(t)$ tal que satisfaga las condiciones: $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 2$.
   (c) Encuentra la solución $x(t)$ tal que satisfaga las condiciones: $x(0) = 0$ y $x(1) = 3$.
4. Sea la EDO: $\dot{x} = \alpha x$ en $|x| < \infty$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Muestra que si $\varphi(t)$ es una solución cualquiera y $\psi(t) = \varphi(t)e^{-\alpha t}$, entonces $\psi(t) \equiv k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.
   (b) Demuestra que: (i) si $\alpha/|\alpha| = -1$, entonces las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$; (ii) si $\alpha/|\alpha| = 1$, entonces las soluciones tienden a cero cuando $t \to -\infty$.
   (c) ¿Qué se puede afirmar de las soluciones si $\alpha = 0$?
5. Sean $\alpha, \gamma > 0$ y $\beta \neq 0$. Muestra que todas las soluciones de $\dot{x} + \alpha x = \beta \exp(-\gamma t)$ tienden a cero cuando $t \to \infty$.
6. Sean L, R, E y ω constantes positivas. Considera la EDO: $L\dot{q} + Rq = E \operatorname{sen} \omega t$.
   (a) Encuentra la solución $q = q(t)$ tal que $q(0) = 0$.
   (b) Demuestra que la solución del inciso anterior puede escribirse en la forma
   $$q(t) = \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t - \alpha\right)\,,$$
   donde $\alpha \in \mathbb{R}$ satisface que
   $$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,.$$
   (c) Haz un bosquejo de la gráfica de la solución dada en el inciso anterior.
7. Encuentra la solución general para las siguientes EDO:
   $$\text{(i) } \dot{x} + x \operatorname{sen} t = -\cos t\,, \qquad \text{(ii) } \dot{x} + \frac{t}{1+t^2}x = 1 - \frac{t^3}{1+t^4}x\,.$$
8. ¿Cuál es el dominio de existencia de las soluciones de los siguientes problemas de Cauchy?:
   $$\text{(P1) } \left\{ \left(1+t^2\right)\dot{x} + 4tx = 0\,, \quad x(0) = \frac{1}{4}\,, \right.$$
   $$\text{(P2) } \left\{ \dot{x} + x = f(t)\,, \quad x(0) = 0\,, \quad \text{donde} \quad f(t) = \begin{cases} 2\,, & 0 \leq t \leq 1\,, \\ 0\,, & t > 1\,. \end{cases} \right.$$
   $$\text{(P3) } \left\{ \dot{x}\cot t + x = 2\,, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1\,, \right.$$

9. Determina todas las soluciones de $\dot{x}\operatorname{sen} t + x\cos t = 1$ en el intervalo $(0,\ \pi)$. Muestra que sólo una de estas soluciones tiene límite finito cuando $t \to 0^+$ y que lo mismo ocurre cuando $t \to \pi^-$.
10. Cuando el interés se capitaliza continuamente, la cantidad de dinero $m = m(t)$ al tiempo t aumenta a una tasa constante γ proporcional a la cantidad presente.
    (a) Calcula la cantidad reunida al término de $T > 0$ años, cuando se deposita inicialmente m_0 en una cuenta de ahorro. ¿En cuántos años se habrá duplicado el capital inicial?
    (b) Muestra que si el interés compuesto no se capitaliza continuamente sino trimestralmente a una razón γ, al cabo de τ trimestres la cantidad reunida está dada por
    $$m(\tau) = m_0\left(1 + \frac{\gamma}{\tau}\right)^{\tau}.$$
    (c) ¿Qué relación tienen los resultados de los incisos (a) y (c)?
11. La ley de enfriamiento de Newton afirma que la razón del cambio de temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre la temperatura del medio $M(t)$ y la del cuerpo, es decir: $\dot{T} = k\,(M(t) - T)$, donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad.
    Era medianoche cuando Sherlock Holmes y el Dr. Watson encontraron el cadáver de Sir Baskerville. La temperatura, constante de 16°C durante toda la noche, la hacía extrañamente agradable para esa época del año. La temperatura al cuerpo sin vida era de 32°C. Al cabo de un rato, exactamente cuando sonaba la una de la madrugada en un campanario cercano, su temperatura había bajado a 30.5°C. ¿A qué hora fue asesinado Sir Baskerville?
    Indicación 1: La temperatura habitual de un adulto vivo es 36.5°C.
    Indicación 2: $\log\left(\dfrac{20.5}{16}\right) / \log\left(\dfrac{16}{14.5}\right) \approx 2.5$.
12. Considera la EDO no lineal
    $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t + x^2}.$$
    (a) Determina la existencia de la función inversa $t = t(x)$ y encuentra la EDO que la satisface.
    (b) Encuentra la solución general para la EDO del inciso anterior y discute la posibilidad de obtener la solución $x = x(t)$.
13. Para la ecuación homogénea de grado dos: $2tx - \left(t^2 - x^2\right)\dot{x} = 0$, calcula la solución para $x(1) = 1$ y muestra que las parejas ordenadas (t, x) que representan la solución es una circunferencia unitaria con centro en $(0, 1)$.
    Ayuda. Considera el cambio de variable $x = vt$.
14. Considera la EDO: $\dot{x} + \alpha(t)x = \beta(t)x\log x$.
    (a) Muestra que al hacer el cambio de variable $v = \log x$, se obtiene una EDO lineal no homogénea para v.
    (b) Encuentra la solución general $x(t)$ de $t\dot{x} + t^3x + x\log x = 0$.
15. Considera la *ecuación de Ricatti* escrita en la forma $\dot{x} = q_1(t) + q_2(t)x + q_3(t)x^2$, donde $q_j(t)$, con $j = 1, 2, 3$, son funciones continuas.
    (a) Sea $x_1(t)$ una solución particular conocida. Verifica que el cambio de variable $x = x_1(t) + 1/u$, conduce a una EDO lineal no homogénea de primer orden para u.
    (b) Para el caso particular donde $q_1(t) = 1/t^2$, $q_2(t) = -1/t$ y $q_3(t) \equiv 1$, determina el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_1(t) = \alpha/t$ es una solución particular.
    (c) Encuentra la solución general.
16. Considera el modelo de inflación y desempleo siguiente:
    $$\begin{cases} \dot{u} = -\alpha(\bar{m} - p) + \beta(\bar{u} - u)\,, \\ \dot{p} = \gamma(\bar{u} - u)\,, \end{cases}$$

donde $u(t)$ es la tasa de desempleo y $\dot{p}(t)$ la tasa de inflación al tiempo; $\bar{u}$ y $\bar{m}$ son las tasas de desempleo e inflación promedio constantes y α, β y γ son constantes de proporcionalidad positivas tales que $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. Transforma el sistema de ecuaciones en una única EDO de segundo orden para la tasa de desempleo al tiempo t.

17. Sea $\alpha t - \beta x + (\beta t - \alpha x)\,\dot{x} = 0$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Muestra que $(t+x)^{\alpha+\beta}\,(t-x)^{\alpha-\beta} = k$ es una solución para cada $k \in \mathbb{R}$.
18. Determina: (i) los puntos de equilibrio, (ii) la estabilidad de cada uno de ellos y (iii) los puntos de inflexión. Haz un bosquejo del espacio fase y de las soluciones para las EDO:
$$\text{(i) } \dot{x} = -4x + 8x^2\,, \qquad \text{(ii) } \dot{x} = x^3 - 15x^2 + 36x\,,$$
$$\text{(iii) } \dot{x} = e^x \operatorname{sen} x\,, \qquad \text{(ii) } \dot{x} = 2x \log\left(\frac{K}{x}\right)\,, \text{ donde } x > 0 \text{ y } K > 0\,.$$
19. Considerar la EDO autónoma $\dot{u} = -\cos u$.
    (a) Haz un bosquejo del plano fase indicando los puntos de equilibrio y su estabilidad.
    (b) Encuentra los puntos de inflexión de $u = u(t)$ y haz un bosquejo de todas las soluciones.
20. Sea la EDO autónoma $\dot{u} = f(u)$, donde
$$f(u) = \begin{cases} u^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{u}\,, & \text{si } u \neq 0 \\ 0\,, & \text{si } u = 0 \end{cases}\,.$$
    (a) Determina si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
    (b) Muestra que $u^* = 0$ es un punto de equilibrio tal que $f'(0) = 0$.
    (c) Demuestra que existe una infinidad de puntos de equilibrio en una vecindad del origen, $u^* \neq 0$, que satisfacen que $f'(u^*) \neq 0$ y que están organizados de tal modo que entre cada dos puntos de equilibrio estables, se encuentra un punto de equilibrio inestable.
21. Una población inicial u_0 de 50 000 individuos habita un microorganismo con una capacidad de carga K de 100 000. Esta población crece a 60 000 individuos después de cinco años. Muestra que la tasa de crecimiento α para esta población es $(1/5)\log 3/2$.
22. Supongamos que se tiene una nueva invención en una comunidad de individuos con una densidad N por unidad de área al tiempo $t = 0$. Sea $p(t)$ la densidad de individuos que conocen la invención en el planeta al tiempo t. El problema de condiciones iniciales que describe la dinámica de p es
$$\text{(P1)} \left\{ \dot{p} = \alpha p(N - p)\,, \quad t > 0\,, \qquad p(0) = p_0\,. \right.$$
    (a) Interpreta el significado de α, resolve el problema (P1) e interpreta.
    (b) Supongamos que el impacto de los medios masivos de información influyen en la adquisición de esta invención. En ese caso el problema (P1) es modificado como sigue
$$\text{(P2)} \left\{ \dot{p} = \alpha p(N - p) + \beta(N - p)\,, \quad t > 0\,, \qquad p(0) = 0\,. \right.$$
    Interpreta el significado de β y la condición inicial $p(0) = 0$, resuelve (P2) y discute el impacto de la nueva invención.
23. Sea $u(t)$ una densidad de población de trigo al tiempo t. Considerando que el trigo es cosechado a una razón $\mu \geq 0$ constante, la dinámica de esta densidad es determinada por
$$\dot{u} = \gamma u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \mu\,,$$
donde $K, \gamma > 0$ se conocen como la *capacidad de carga* y la *razón de crecimiento intrínseco*, respectivamente.

(a) Encuentra los intervalos de μ, en términos de K y γ, para los cuales los puntos de equilibrio: (i) existen y son distintos, (ii) es único y de multiplicidad dos y (iii) no existen.
(b) Determinar la estabilidad de todos los escenarios para los puntos de equilibrio del inciso anterior.
(c) Para K y γ fijos, hacer un bosquejo de la gráfica de los puntos de equilibrio u^* al variar continuamente el parámetro μ.
(d) A partir de los resultados de los incisos anteriores, indicar las consecuencias de cosechar trigo desmesuradamente.

24. Sea K el nivel constante de capital en una industria y $E(t)$ el nivel de empleo al tiempo t. Se tiene una función de producción dada por $P(t) = K^{\gamma}E(t)^{1-\gamma}$, donde $0 < \gamma < 1$. Se supone que el crecimiento del cambio en la tasa de empleo está dado por

$$\text{(E1)} \quad \frac{\dot{E}}{E} = \alpha - \beta\frac{E}{P}, \quad \text{donde} \quad \alpha, \beta > 0\,.$$

(a) Muestra que la EDO del nivel de empleo está dada por

$$\text{(E2)} \quad \dot{E} = \alpha E - \frac{\beta}{K^{\gamma}}E^{1+\gamma}\,.$$

(b) Escribe los dos puntos de equilibrio de (E2) como función de α, β, K y γ.
(c) Sea $E(0) = E_0$ la condición inicial. Muestra que, bajo estas hipótesis, el nivel de empleo es siempre creciente si $0 < E_0 < E^*$ y decreciente si $E_0 > E^*$, donde E^* es el punto de equilibrio positivo.
(d) Determinar el límite $\lim_{t\to\infty} E(t)$ para todos los valores de E_0.

25. Muestra que $\left(1+t^2\right)\dot{x} + 2tx = 0$ es una EDO exacta y encuentra la solución general.

26. Utilizando la teoría de EDO exactas, resuelve los siguientes problemas de Cauchy

$$\text{(P1)} \quad \left\{ \left(t^3 - t^2\operatorname{sen}(x) - x\right)\dot{x} + 2t\cos(x) + 3t^2x = 0\,, \quad x(0) = 2\,, \right.$$

$$\text{(P2)} \quad \left\{ \left(te^{tx}\cos(2t) - 3\right)\dot{x} + xe^{tx}\cos(2t) - 2e^{tx}\operatorname{sen}(2t) + 2t = 0\,, \quad x(0) = 0\,, \right.$$

$$\text{(P3)} \quad \left\{ \left(t^2 + tx\right)\dot{x} + 3tx + x^2 = 0\,, \quad x(2) = 1\,. \right.$$

27. Demuestra que las *ecuaciones separables* son un caso particular de las *ecuaciones exactas*.

28. Las ecuaciones de estado que caracterizan a un gas ideal simple son

$$PV = NRT\,, \qquad U = kNRT\,,$$

donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura en la escala de Kelvin, U es la energía interna, N es el número de partículas, R es la constante universal de los gases y k una constante de proporcionalidad.
Sea $v = V/N$ y $u = U/N$. Las cantidades u_0 y v_0 son la *densidad de energía interna* y la *densidad de volumen* iniciales del sistema, respectivamente, entonces la *entropía inicial* está dada por $s_0 = s(u_0, v_0)$.
A partir de la *ecuación fundamental*

$$\frac{1}{T} + \left(\frac{P}{T}\right)v' = 0\,, \qquad \text{donde} \quad v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\,,$$

Muestra que la entropía $s = s(u, v)$ está dada por

$$s(u,v) = s_0 + R\log\left(\frac{u^k v}{u_0^k v_0}\right)\,.$$

Nota. La entropía es una cantidad termodinámica que indica la <u>incapacidad</u> de la energía interna de un sistema convertirse en energía mecánica.

29. Verifica si las siguientes ecuaciones son exactas y calcula la solución general.
   (a) $(2t + 3t^2x)\mathrm{d}t + (t^3 - 3x^2)\mathrm{d}x = 0$.
   (b) $e^{-x}\mathrm{d}t - (2x + te^{-x})\mathrm{d}x = 0$.
30. Utilizando la teoría de EDO exactas, encuentra la solución general de la *ecuación de Bernoulli*

$$\dot{x} + \alpha(t)x = \beta(t)x^n ,$$

   donde $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones conocidas y $n \in \mathbb{Z}$.
31. Encuentra la función $f(t)$ para la cual la ecuación $e^t \operatorname{sen}(t) + f(t)x^2 - 3 + (2tx - x^2)\dot{x} = 0$ es exacta y Encuentra la solución general.
32. La ecuación $t^2 + x + f(t)\dot{x} = 0$ tiene el factor integrante $\mu(t) = t$. Encuentra todas las posibles funciones $f(t)$ que garantizan la existencia de la solución general.
33. Sean $M = M(t, x)$ y $N = N(t, x)$. Muestra que si el factor integrante $\mu = \mu(z)$ es tal que $z = t^{n+1}x^{m+1}$, donde $n, m \in \mathbb{R}^+$, entonces μ está dado por

$$\mu(z) = \exp\left(\int_k^z \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right) , \quad \text{donde} \quad \psi(z) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial x}}{(n+1)t^n M - (m+1)x^m N} .$$

34. Considera una EDO lineal de primer orden

$$\dot{x} + P(t)x = Q(t) , \tag{1}$$

   donde $P,\ Q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.
   (a) Demuestra que siempre se puede encontrar un factor integrante $\mu = \mu(t)$ que sólo depende de t y que convierte (1) en una EDO exacta.
   (b) Resuelve la EDO exacta y comprueba que se obtiene la solución dada por

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^t \mu(\xi)Q(\xi)\mathrm{d}\xi , \quad \text{donde} \quad \mu(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t P(\xi)\mathrm{d}\xi\right) .$$

35. Sea la EDO: $t - x + (t + x)\dot{x} = 0$.
   (a) Muestra que no es exacta y busca un factor integrante cuyo argumento es de la forma $z = t^2 + x^2$.
   (b) Utiliza coordenadas polares, $t = r\cos\theta$ y $x = r\operatorname{sen}\theta$, para mostrar que las soluciones forman una familia espirales que convergen (divergen) al origen cuando θ varía a favor (en contra) de las manecillas del reloj.
   (c) Haz un bosquejo de la familia de soluciones encontrada en el inciso anterior.

   Ayuda. Observa que es posible elegir la constante de integración en la forma $k = \log c$, con $c > 0$.
36. La *EDO de Bernoulli de grado n* está dada por

$$\dot{x} + \alpha(t)x = \beta(t)x^n ,$$

   donde $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones conocidas y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.
   Nota histórica. *Este problema fue planteado por Jakob Bernoulli (1655–1705) a sus 41 años; el resultado fue demostrado en el siglo XVII por Gottfried Leibniz (1646–1716), uno de los creadores del cálculo diferencial e integral y rival de Isaac Newton (1642–1726/27), y Johann Bernoulli (1667–1748), mentor de Leonhard Euler (1707–1783), uno de los matemáticos más importantes de la historia.*
   (a) Haz el cambio de variable $y = x^{1-n}$ para obtener la EDO lineal no homogénea

$$\dot{y} + (1 - n)\alpha(t)y = (1 - n)\beta(t) .$$

(b) Utilizando la *Teoría de ecuaciones exactas*, encuentra la solución general en términos de $x = x(t)$.
(c) ¿Cuál es la diferencia en la solución general cuando n es par y cuando n es impar?
(d) La idea de Johann fue resolver la ecuación haciendo el cambio de función incógnita que transforma a $x(t)$ en $y(t)$ por medio de $x(t) = u(t)y(t)$. ¿Cómo elegir $u(t)$ para que la EDO resultante sea separable?

37. La *ecuación de Riccati* es una EDO de primer orden no lineal y no homogénea dada por

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 = f(t)\,,$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ son funciones conocidas.
(a) Suponiendo que $y_p(t)$ es una solución, por medio de la transformación $z = x - y_p$, muestra que esta ecuación es una EDO de Bernoulli. ¿De qué grado es?
(b) Encuentra la solución general en términos de $x = x(t)$ utilizando el resultado del inciso anterior.

Nota histórica. *Esta ecuación fue estudiada por Jacopo Riccati (1676–1754) y se considera una de las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales analizadas a profundidad.*

38. Determina los valores de $\theta \in \mathbb{R}$ tales que la EDO lineal $\ddot{x} + \theta x = 0$, con condiciones de frontera $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$, tenga soluciones no identicamente cero.

39. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de la EDO lineal homogénea de segundo orden

$$\ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + \beta(t)x = 0\,, \tag{2}$$

donde $\alpha(t), \beta(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
(a) Muestra que el Wronskiano satisface la EDO: $\dot{W} = -\alpha(t)W$ y encuentra la solución $W(t)$ cuando $x_1(t_0) = x_0$, $\dot{x}_1(t_0) = u_0$, $x_2(t_0) = y_0$ y $\dot{x}_2(t_0) = v_0$.
(b) Muestra que si $x_0/y_0 = u_0/v_0$, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no forman una base del espacio de soluciones de (2).

40. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de

$$\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0\,,$$

dadas por

$$x_1(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,, \quad x_2(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t^2 - \xi^2}{2}\right) \mathrm{d}\xi\,.$$

Calcula el Wronskiano y encuentra la solución para $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$.

41. Utiliza la *fórmula de Euler* para Muestra que $(\cos t + i \operatorname{sen} t)^{\omega} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)$, con $\omega \in \mathbb{R}$, y usa este resultado para encontrar las identidades trigonométricas del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t \quad \text{y} \quad \cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\,.$$

42. Muestra que $(\cos t_1 + i \operatorname{sen} t_1)(\cos t_2 + i \operatorname{sen} t_2) = \cos(t_1 + t_2) + i \operatorname{sen}(t_1 + t_2)$ y usa este resultado para encontrar las identidades:

$$\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(t_1 + t_2) = \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 - \cos t_1 \operatorname{sen} t_2\,.$$

43. Muestra que los conjuntos de abajo son linealmente independientes:
(a) $\left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\right\}$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distintos.
(b) $\left\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\right\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\left\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\right\}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(d) $\{\cos(\beta t), \operatorname{sen}(\beta t)\}$, donde $\beta \in \mathbb{R}$.

44. Encuentra la solución a los siguientes problemas de Cauchy:

$$\text{(P1)} \begin{cases} \ddot{x} - 6\dot{x} + x = 0\,, \\ x(2) = 1\,,\ \dot{x}(2) = 1 \end{cases}, \qquad \text{(P2)} \begin{cases} 3\ddot{x} - 2\dot{x} + 4x = 0\,, \\ x(2) = 1\,,\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases},$$

$$\text{(P3)} \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \\ x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = v_0\,, \\ \omega^2, x_0, v_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \qquad \text{(P4)} \begin{cases} 9\ddot{x} - 12\dot{x} + 4x = 0\,, \\ x(\pi) = 0\,,\ \dot{x}(\pi) = 2 \end{cases},$$

45. Muestra que todas las soluciones de la familia biparamétrica $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$ para $\alpha, \beta > 0$.

46. Determina la solución $x = \varphi(t)$ de la EDO

$$\dot{x}' + x = f(t)\,, \quad \text{donde} \quad f(t) := \begin{cases} t\,, & 0 \leq t \leq \pi\,, \\ \pi e^{\pi} - t\,, & t > \pi \end{cases}$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ se satisfacen.
Ayuda. La variable dependiente x y su derivada $\dot{x}$ son continuas para todo $t \geq 0$.

47. Encuentra la solución general de la EDO

$$\ddot{x} + x = \sec t\,, \quad -\pi < t < \pi\,.$$

48. La EDO $t^2\ddot{x} + \gamma t\dot{x} + \delta x = 0$, con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, es conocida como la *ecuación de Euler de grado dos*.
(a) Prueba que $x(t) = t^{\lambda_*}$ es solución de esta ecuación, si λ_* es raíz del polinomio característico: $P_2(\lambda) = \lambda^2 + (\gamma - 1)\lambda + \delta$.
(b) Encuentra la solución general para: (i) $\delta < \left(\dfrac{\gamma-1}{2}\right)^2$, (ii) $\delta = \left(\dfrac{\gamma-1}{2}\right)^2$ y (iii) $\delta > \left(\dfrac{\gamma-1}{2}\right)^2$.
(c) Encuentra la solución en $0 < t < \infty$ para $\gamma = -1$, $\delta = -2$ y $x(1) = 0$ y $\dot{x}(1) = 1$.

49. La EDO lineal

$$\lambda_n t^n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + \lambda_{n-1} t^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + \lambda_2 t^2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_1 t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \lambda_0 x = 0\,,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, se conocen como *ecuación de Euler de grado n*.
(a) Encuentra el polinomio característico $P_n(\lambda)$ y muestra que éste es de n-ésimo grado.
(b) Exhibe la base, en general complejo valuada, que genera el espacio de soluciones.
(c) Sea $n = 2$. Realiza el cambio de variable $\tau = \log t$, resuelve la EDO lineal resultante y encuentra la solución general en términos de la variable independiente original t.

50. Sea $x_1(t) = (1 + t)^2$ una solución de la EDO $\ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + \beta(t)x = 0$, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ dos funciones suaves. Considera que el Wronskiano de cualesquiera dos soluciones es constante. Encuentra la solución general de la EDO

$$\ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + \beta(t)x = 1 + t\,.$$

51. Encuentra la solución general de la EDO

$$\ddot{x} - \frac{2t}{1+t^2}\dot{x} + \frac{2}{1+t^2} = 1 + t^2\,.$$

52. Considera la EDO lineal $\ddot{x} - ax = t\, e^{2t}$ con $a \in \mathbb{R}$. ¿Qué condiciones debe satisfacer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para que $\varphi(t) := f(t)\, e^{2t}$ sea solución?
53. Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial lineal de segundo orden de la forma $\mathcal{L}[x] = \ddot{x} - 2\lambda_1 \dot{x} + \lambda_1^2 x$ con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
    a) Muestra que $\mathcal{L}\left[\exp\left(\lambda_1 t\right) x\right] = \exp\left(\lambda_1 t\right) \ddot{x}$.
    b) Encuentra la solución general de la EDO: $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = t^{3/2} \exp\left(3t\right)$.
54. Encuentra la solución particular de $\ddot{x} + \dot{x} + x = e^t$ y $\ddot{x} + \dot{x} + x = t \operatorname{sen} t$ para encontrar la solución del problema de Cauchy

$$\text{(P)} \ \left\{ \ddot{x} + \dot{x} + x = e^t + t \operatorname{sen} t\,, \quad x(0) = 0\,,\, \dot{x}(0) = 0\,. \right.$$

55. Se tiene una masa m sujeta a un resorte con constante de elasticidad k, la cual está sumergida en un fluido con viscosidad ν y sufre un forzamiento mecánico externo al fluido. La dinámica de esta masa es gobernada por una EDO de la forma

$$m\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + kx = F_0 \cos\left(\omega t\right)\,, \quad \text{donde} \quad F_0 = m a_0\,,$$

donde a_0 y ω son la amplitud de aceleración y la frecuencia de oscilación del forzamiento, respectivamente.
    (a) Sean $\omega_0^2 = k/m$ y $\gamma = \nu/m$, conocidos como la *frecuencia natural* del resorte y el *coeficiente de fricción*, respectivamente. Encuentra la solución en términos de estos dos parámetros para las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$.
    (b) Escribe la solución particular en la forma $x_p(t) = A \cos\left(\omega t - \delta\right)$, donde $A = A(\omega)$.
    (c) Muestra que la amplitud A es máxima cuando $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma}$; este valor es conocido como la *frecuencia de resonancia*. Haz un bosquejo de la gráfica de $A = A(\omega)$.
56. Se tiene un circuito que consiste de: (i) un capacitor con *capacitancia* C, (ii) una *resistencia* R y (iii) un *inductor* L bajo la acción de una fuente de fuerza electromotriz $E(t)$. Sea $q(t)$ la carga eléctrica de un capacitor al tiempo t. Como consecuencia de las *Leyes de Kirchoff*, la EDO que gobierna la dinámica de la carga eléctrica $q(t)$ es la parte real de la solución de

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = E(t)\,, \quad \text{donde} \quad E(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(i\omega t\right)\,. \tag{3}$$

    (a) Muestra que

$$\varphi(t) = -\frac{i}{\omega} \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \exp\left(i\omega t\right)$$

    es la solución particular de (3) y calcula su parte real.
    (b) La cantidad $\eta = R + i\left(\omega L - 1/(\omega C)\right)$ es conocida como la *impedancia compleja del circuito*. El recíproco $1/\eta$ se conoce como *admitancia* y la parte real e imaginaria de $1/\eta$ se conoce como *conductancia* y *susceptancia*, respectivamente. Determina la admitancia, la conductancia y la susceptancia.
57. Escribe las siguientes ecuaciones como sistemas de ecuaciones lineales y resuélvelas.
    (a) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$.
    (b) $\ddot{x} + x = 0$.
    (c) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$.

58. Encuentra la solución general del sistema determinado por las ecuaciones

$$\dot{x} = 3x + y + e^t \quad \text{y} \quad \dot{x} = x + 3y + e^t \,.$$

59. Calcula <u>una</u> matriz fundamental y <u>la</u> solución general de los sistemas lineales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

60. Para una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

muestra que la matriz de cambio de base $\mathbf{Q}$, la cual está formada por los vectores propios columna $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$, satisfacen que la matriz diagonalizada $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ tiene la forma:

(a) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y son distintos.

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_* & 1 \\ 0 & \lambda_* \end{bmatrix}$, si $\lambda_* \in \mathbb{R}$ es raíz de multiplicidad algebraica dos del polinomio característico.

(c) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, si $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$, tales que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

61. Resuelve el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

62. Calcula la solución general de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores $T > 0$ el Problema de Valores a la Frontera (PVF) definido por el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y las condiciones a la frontera $x_1(0) = 0$, $x_2(T) = 0$, tiene soluciones no idénticamente cero?

63. Calcula la solución del problema de Cauchy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

¿La solución es acotada para todo $t \in \mathbb{R}$?

64. Resuelve los sistemas $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, donde

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$.

65. Considera el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(a) Encuentra la función $f(y_1, y_2)$ tal que el bajo el cambio de variables $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$, el sistema (4) se transforma en un sistema lineal de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(y_1, y_2) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

(b) Sea $y(t) = y_1(t)$ y construye una EDO lineal de segundo orden a partir de (5) para $y(t)$.
(c) Resuelve los sistemas (4) y (5) y verifica si las soluciones son equivalentes.

66. Dada la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}$, donde $0 \le \alpha < 2\pi$ y

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra los valores propios como funciones de α.
(b) Encuentra la EDO de una sola variable asociada.
(c) Haz un bosquejo de Tra $(\mathbf{A}(\alpha))$ y det $(\mathbf{A}(\alpha))$ como funciones de α.
(d) Encuentra los intervalos para α donde los valores propios $\lambda(\alpha)$: (i) son reales y distintos, (ii) es real y único de multiplicidad algebraica dos y (iii) son complejos.
(e) Resolver para $\alpha = 0, \pi/6, \pi/2, 3\pi/2$.

67. Considera la ecuación diferencial dada por el determinante

$$\det\left(\begin{bmatrix} t^2 & t & x \\ 0 & 1 & \dot{x} \\ 1 & 0 & \ddot{x} \end{bmatrix}\right) = (t^2 + t - 1)e^t. \tag{6}$$

(a) Muestra que tanto e^t como $e^t + 1/t$ son dos soluciones particulares de (6).
(b) A partir del inciso anterior, concluye que $\varphi_1(t) = 1/t$ es una solución de la EDO homogénea.
(c) Considera que otra solución es de la forma $\varphi_2(t) = u(t)\varphi_1(t)$ y encuentra una EDO para $u(t)$.
(d) A partir del inciso anterior, escribe la solución general de (6).

68. Calcula <u>una</u> matriz fundamental y <u>la</u> solución general de los sistemas lineales $\dot{x} = \mathbf{A}x$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.
(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

69. Para una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

muestra que la matriz de cambio de base $\mathbf{Q}$, la cual está formada por los vectores propios columna $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$, satisfacen que la matriz diagonalizada $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ tiene la forma:

(a) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son distintos o $\lambda_1 = \lambda_2$ de multiplicidad geométrica dos.

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_* & 1 \\ 0 & \lambda_* \end{bmatrix}$, si $\lambda_* \in \mathbb{R}$ es raíz de multiplicidad dos algebraica del polinomio característico.

(c) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, si $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$, tales que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

70. Calcula la solución general de $\dot{x} = \mathbf{A}x$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores $T > 0$ el Problema de Valores a la Frontera (PVF): $\dot{x} = \mathbf{A}x$, $x_1(0) = 0$, $x_2(T) = 0$ tiene soluciones no triviales?

71. Resuelve los sistemas $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{b}(t)$, donde

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$.

72. Dada la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}$, donde $0 \leq \alpha < 2\pi$ y

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 1 \\ -1 & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra los valores propios como funciones de α.

(b) Encuentra la EDO de una sola variable asociada.

(c) Haz un bosquejo de Tra $(\mathbf{A}(\alpha))$ y det $(\mathbf{A}(\alpha))$ como funciones de α.

(d) Encontrar los intervalos para α donde los valores propios $\lambda(\alpha)$: (i) son reales y distintos, (ii) es real y único de multiplicidad dos y (iii) son complejos.

(e) Resuelve para $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$.

73. Esboza el retrato de fase del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz con valores propios $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ con

(a) $\alpha < 0 < \lambda_1$.

(b) $\alpha = 0 < \lambda_1$.

(c) $0 < \alpha < \lambda_1$.

74. Sea $p \in \mathbb{R}$, $p \neq -1$. Encuentra una substitución $t = g(s)$ tal que reduzca el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = t^p\, \mathbf{A}\mathbf{x}$$

a un sistema lineal a coeficientes constantes. Resuelve el caso cuando $p = 2$ y $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

75. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Muestra que, para toda $t, s \in \mathbb{R}$, se satisface:

(a) Propiedad identidad: $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz identidad.

(b) Propiedad de grupo: $e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$.

(c) Propiedad de inversión: $e^{-\mathbf{A}t}$ es la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$.

76. En una red eléctrica se tienen dos corrientes $I_1(t)$ y $I_2(t)$ al tiempo t que, debido a las *Leyes de Kirchoff*, siguen la dinámica determinada por el sistema de EDO: $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{M}\mathbf{I} + \mathbf{E}(t)$, donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_2}{L_2} & \dfrac{R_2}{L_2} \\ \dfrac{R_2}{L_1} & \dfrac{R_2}{L_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}(t) = \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{E_0}{L_2}\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

y las resistencias y las conductancias para cada corriente son denotadas por $R_{1,2}$ y $L_{1,2}$, respectivamente. Los parámetros E_0 y ω son la amplitud y frecuencia, respectivamente, de una fuente eléctrica externa. Todos los parámetros son positivos.

(a) Muestra que los valores propios de $\mathbf{M}$ son reales.
(b) A partir del resultado en el inciso anterior, haz un cambio de variable adecuado para desacoplar el sistema, *i.e.* diagonalizarlo.
(c) Encuentra las corrientes $I_1(t)$ y $I_2(t)$, donde $I_j(0) = 0$ para $j = 1, 2$.

77. Supongamos que $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ representan poblaciones de susceptibles, infectados y recuperados (inmunes) al tiempo t, respectivamente. En el escenario de una epidemia recurrente, el siguiente sistema determina su dinámica.

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S I + \mu\,, \\ \dot{I} = \beta S I - \gamma I\,, \\ \dot{R} = \gamma I - \mu \end{cases},$$

donde $\gamma > 0$ la tasa de recuperación, $\beta > 0$ es la tasa de infección y $\mu > 0$ representa nacimientos en presencia de una enfermedad infantil (*e.g.* sarampión sin vacunación). El modelo supone que las muertes solamente ocurren en la población de inmunes (personas de edad avanzada).

(a) Muestra que la población total es constante para todo tiempo.
(b) Encuentra los valores de la población $[S_*, I_*, R_*]^T$ tales que son constantes para todo $t > 0$.
(c) Observa que la EDO para R solamente depende de I, entonces considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S I + \mu\,, \\ \dot{I} = \beta S I - \gamma I\,. \end{cases}$$

y muestra que bajo el cambio de variable $u = S - S_*$ y $v = I - I_*$, la aproximación lineal indica que $v(t)$ satisface la EDO de segundo orden

$$\gamma \ddot{v} + \beta\mu\dot{v} + \beta\gamma\mu v = 0.$$

(d) Haz un bosquejo de las órbitas en una vecindad de $[S_*, I_*]^T$ cuando $\beta\mu\gamma^2 < 4$. Este punto de equilibrio es conocido como *estado endémico* de la enfermedad.

78. Considera que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\xi^2\right) \mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}$, encuentra la transformada de Laplace $\mathcal{L}\left[t^{-1/2}\right]$.
Ayuda. Haz el cambio de variable $u = \sqrt{t}$.

79. Utiliza la transformada de Laplace para resolver el problema

$$\begin{cases} \ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = e^{2t}\,, \\ x(0) = 1\,, \quad \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

80. Muestra que si $\mathcal{L}\left[u(t)\right] = U(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left[-tu(t)\right] = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\,.$$